שלבי הפתרון בשאלות גדילה ודעיכה

מתמטיקה • כיתה י"ב • 4 יחידות לימוד (שאלון 472)

חלק א' • מסדרים את הנתונים

1 מה זה M_0? ומה יחידת הזמן?

M_0 = הכמות בזמן $t = 0$ (בתחילת השנה / ביום הגילוי)

אחוז **לשנה** ← t בשנים • 18 חודשים ← $t = 1.5$

2 מוצאים את q

עולה ב־$p\%$ ← $q = 1 + \frac{p}{100}$ • יורד ← $q = 1 - \frac{p}{100}$

עלייה של 15% ← $q = 1.15$ • גדל **פי 1.5** ← $q = 1.5$

3 כותבים את הפונקציה: $M(t) = M_0 \cdot q^t$

גדילה: $q > 1$ (גרף עולה) • דעיכה: $0 < q < 1$ (גרף יורד)

זיהוי גרף: החיתוך עם ציר y הוא M_0 • q גדול ← גרף תלול

חלק ב' • מה שואלים? בוחרים את החישוב

4 הכמות אחרי t יחידות זמן

מציבים t בפונקציה • „לפני 3 שנים" ← $t = -3$

שני שלבים: הכמות בסוף שלב א' = M_0 של שלב ב'

5 מוצאים q (נתונות שתי כמויות)

$M_0 \cdot q^t = M(t)$ ← $q^t = \frac{M(t)}{M_0}$ ← q = שורש מסדר t

$q = 1.12$ ← עלייה של 12% • $q = 0.92$ ← ירידה של 8%

6 מוצאים את הזמן t: מוציאים ℓn

$q^t = k$ ← $t \cdot \ell n\, q = \ell n\, k$ ← $t = \frac{\ell n\, k}{\ell n\, q}$

אי־שוויון עם $q < 1$: $\ell n\, q < 0$ ← **הופכים את הסימן!**

7 מתי שתי הכמויות שוות?

$a \cdot {q_1}^t = b \cdot {q_2}^t$ ← $(\frac{q_1}{q_2})^t = \frac{b}{a}$ ← ℓn כמו בשלב 6

זו נקודת החיתוך של שני הגרפים

חלק ג' • בודקים ועונים

8 עונים במילים, עם יחידות

„בתחילת כל שנה" / „לראשונה" ← t שלם: מעגלים **למעלה**

בודקים בהצבה שהכמויות יוצאות שוות / עוברות את הערך

נוסחאות

$$M(t) = M_0 \cdot q^t$$

M_0 – הכמות בהתחלה

q – מנת הגדילה / הדעיכה ליחידת זמן

$$\ell n\, a^t = t \cdot \ell n\, a$$

$$a^t = b \iff t = \frac{\ell n\, b}{\ell n\, a}$$

$$(\frac{a}{b})^t = \frac{a^t}{b^t}$$

לזכור

אפשר ℓn או $\log$, העיקר אותו דבר בשני האגפים

כאשר $0 < a < 1$: $\ell n\, a < 0$

דוגמה: ביישוב א' 10 נדבקים, מספרם גדל פי 1.5 ביום. ביישוב ב' 100 נדבקים, גדל ב־20% ביום. מתי שווים?

2 א': $q = 1.5$ • ב': $q = 1.2$

3 $10 \cdot 1.5^t$ ו־$100 \cdot 1.2^t$

7 $10 \cdot 1.5^t = 100 \cdot 1.2^t$ ← $(\frac{1.5}{1.2})^t = \frac{100}{10}$ ← $1.25^t = 10$

6 $t = \frac{\ell n\, 10}{\ell n\, 1.25} \approx 10.32$

8 בדיקה: בשני היישובים כ־656

תשובה: אחרי כ־10.32 ימים.

5 מ־104 ל־200 ב־5 חודשים: $q^5 = \frac{200}{104}$ ← $q \approx 1.1397$

גדל בכ־13.97% בחודש

טעויות נפוצות

- ירידה של 8%: $q = 0.92$, לא 0.08
- גדל **פי 3**: $q = 3$, לא 1.03
- 10% בשנה, 3 שנים ≠ 30%: כופלים ב־q
- מחלקים ב־$\ell n\, q$ שלילי ← הסימן מתהפך
- יצא 13.6 ושואלים „בתחילת שנה": עונים 14, לא 13