שלבי הפתרון בשאלות פונקציות לוגריתמיות

מתמטיקה • כיתה י"ב • 4 יחידות לימוד (שאלון 472)

חלק א' • תחום, פרמטר וחיתוכים

1 תחום הגדרה

מה שבתוך ה־ $\ln$ **חיובי** (וגם מכנה $\neq 0$)

$\ln x$ ← $x>0$ • $\ln(x^2-9)$ ← $x<-3$ או $x>3$

2 יש פרמטר? מציבים את הנתון

נקודה על הגרף ← מציבים ב־ f • נתון f' ← גוזרים ומשווים

משתמשים ב־ $\ln e^3=3$ • $\ln e=1$ • $\ln 1=0$

3 חיתוך עם הצירים

ציר y: בודקים קודם אם $x=0$ בתחום (ב־ $\ln x$ – לא!)

ציר x: $\ln(u)=0$ ← $u=1$ • $\ln x=k$ ← $x=e^k$

יש $\ln x$ וגם $\ln^2 x$? ← גורם משותף או $t=\ln x$

חלק ב' • אסימפטוטות, נגזרת וקיצון

4 אסימפטוטות

אנכית: בקצה התחום שבו מה שבתוך ה־ $\ln$ שואף ל־0 ← $\ln\to-\infty$

אופקית: למשל $\frac{\ln x}{x}\to 0$ כאשר $x\to\infty$ (המכנה גדל מהר יותר)

5 גוזרים: $f'(x)$

$(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ • $(\ln^2 x)'=2\ln x\cdot\frac{1}{x}$ • מכפלה / מנה

מסדרים למכנה משותף x

6 $f'(x)=0$ וטבלת סימנים

בתחום $x>0$ ← המכנה חיובי, הסימן לפי המונה

מחיובית לשלילית ← **מקסימום** • ולהפך ← **מינימום**

ואז **סקיצה:** תחום ← אסימפטוטות ← חיתוכים ← קיצון

חלק ג' • שאלות המשך: מה שואלים?

- $f(x-4)$: הזזה 4 ימינה – גם התחום והאסימפטוטות זזים
- $-f(x)+k$: שיקוף והזזה • $|f(x)|$: החלק השלילי משתקף למעלה
- **גרף** f': מעל ציר x ← f עולה • שטח מתחת ל־ f': $f(b)-f(a)$
- **זוגית?** קודם התחום חייב להיות סימטרי סביב 0, ואז $f(-x)=f(x)$
- **מכפלה** $f\cdot f'>0$: לשני הגורמים אותו סימן ← לפי הסקיצה וטבלת הסימנים

נוסחאות

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\ln(f(x)))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b$$

$$\ln a^n=n\cdot\ln a$$

$$\ln x=k\iff x=e^k$$

לזכור

- $\ln 1=0$ • $\ln e=1$ •
- $\ln^2 x=(\ln x)^2$
- $x\to 0^+$: $\ln x\to-\infty$

דוגמה: $f(x)=\ln^2 x-2\ln x$

1. תחום: $x>0$
3. $\ln x(\ln x-2)=0$
   $x=1$ או $x=e^2$
5. $f'=\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}=\frac{2\ln x-2}{x}$
6. $\ln x=1$ ← $x=e$
   $f(e)=1-2=-1$
   מינימום $(e,-1)$
4. $x\to 0^+$: $f\to\infty$
   אסימפטוטה $x=0$
1. תחום של $\ln(4x-x^2)$
   $4x-x^2>0$ ← $0<x<4$
   חיתוך: $4x-x^2=1$ ←
   $x=2\pm\sqrt{3}$

טעויות נפוצות

- $\ln(u)=0$ ← $u=1$, לא $u=0$
- שוכחים את u' במונה של הנגזרת
- פתרון מחוץ לתחום – נפסל
- y של קיצון: מציבים ב־ f, לא ב־ f'
- $x=0$ לא בתחום ← אין חיתוך עם ציר y