שלבי הפתרון בשאלות גאומטרייה במרחב (וקטורים)

מתמטיקה • כיתה י"ב • 4 יחידות לימוד (שאלון 472)

איך נתונה השאלה?

וקטורים $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ (ללא שיעורים)

שלושה וקטורים היוצאים מקודקוד אחד

1 מבטאים כל וקטור בעזרת $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$

הולכים לאורך המקצועות:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = -\underline{u} + \underline{v}$

אמצע קטע ← $\frac{1}{2}$ • נגד הכיוון ← מינוס

2 מכינים את המכפלות הסקלריות

$\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$ • $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha$

וקטורים מאונכים (למשל בתיבה) ← מכפלה 0

3 מחשבים – פותחים סוגריים

$(\underline{u} - \underline{v})^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

האורך = שורש התוצאה

מערכת צירים (x, y, z)

קודקוד בראשית, מקצועות על החלקים החיוביים של הצירים

1 קובעים שיעורים לקודקודים

לפי אורכי המקצועות, למשל $A(3, 0, 0)$

קודקוד נוסף בתזוזה: $B = A + \overrightarrow{DC}$

2 נקודות מיוחדות

אמצע: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ (וכך גם y, z)

חלק מקטע: $M = C + \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$

3 וקטור = סוף – התחלה

$\overrightarrow{EF} = F - E$ • אורך: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

מכפלה: $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

4 מה שואלים? עונים לפי הסוג

מאונכים? $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ • **מאונך למישור?** מאונך ל-2 ישרים נחתכים במישור (שתי מכפלות = 0)

מקבילים? $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ (כפולה במספר) • **זווית:** $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ – שני הווקטורים **יוצאים מקודקוד הזווית**

שטח: משולש $\frac{a \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$ (ישר-זווית: חצי מכפלת הניצבים) • מקבילית $a \cdot b \cdot \sin\alpha$

נפח: פירמידה $\frac{S \cdot h}{3}$ • מנסרה / תיבה $S \cdot h$ • הגובה = הקטע המאונך לבסיס

✏️ דוגמה – וקטורים

$|\underline{u}| = |\underline{v}| = 2$, הזווית בין $\underline{u}$ ל-$\underline{v}$ היא $60°$. מצאו את $|\underline{u} - \underline{v}|$ ואת הזווית בין $\underline{u}$ ל-$\underline{u} - \underline{v}$

1. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 2 \cdot 2 \cdot \cos60° = 2$
2. $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = 4 - 2 \cdot 2 + 4 = 4$ ← $|\underline{u} - \underline{v}| = 2$
3. $\underline{u} \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = 4 - 2 = 2$ ← $\cos\alpha = \frac{2}{2 \cdot 2} = 0.5$

תשובה: $|\underline{u} - \underline{v}| = 2$ • $\alpha = 60°$

✏️ דוגמה – שיעורים

תיבה: $A(2, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $D'(0, 0, 4)$, הקודקוד D בראשית. M אמצע BD'. מצאו את $\sphericalangle AMC$

1. $B(2, 4, 0)$ ← $M(1, 2, 2)$
2. $\overrightarrow{MA} = (1, -2, -2)$, $\overrightarrow{MC} = (-1, 2, -2)$
3. $\cos\alpha = \frac{-1 - 4 + 4}{3 \cdot 3} = -\frac{1}{9}$

תשובה: $\sphericalangle AMC \approx 96.38°$

📐 מהנוסחאון

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

שטח משולש $\frac{ab \sin\gamma}{2}$

💡 לזכור

- קובייה/תיבה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ לכל זוג
- מקצוע מאונך לבסיס ← מאונך לכל ישר בבסיס
- משולש שווה צלעות ← זווית $60°$

⚠️ טעות נפוצה

- $(\underline{u} - \underline{v})^2$: לא לשכוח את $-2\underline{u} \cdot \underline{v}$
- וקטור נגדי משנה סימן: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
- $\cos$ שלילי ← זווית קהה, תקין