שאלות קצרות – כל השאלות עם תשובות סופיות

הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י״א (שאלון 571) • 17 שאלות

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1

1. ענו על <u>שניים</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

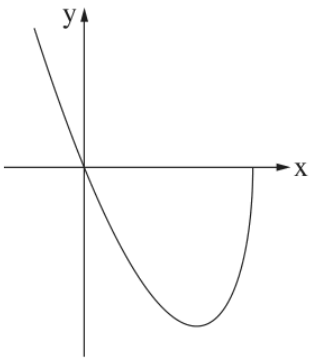
א. נתון כי השוויון $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{b}$ מתקיים בעבור $n=2$.

b הוא פרמטר שונה מ־0.

(1) מצאו את הערך של b.

(2) הציבו $b=4$ והוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי.

ב. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x\le 6$.



אחד מן הביטויים I–IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

I. $f(x)=x\sqrt{6-x}$

II. $f(x)=-x\sqrt{6-x}$

III. $f(x)=x\sqrt{x-6}$

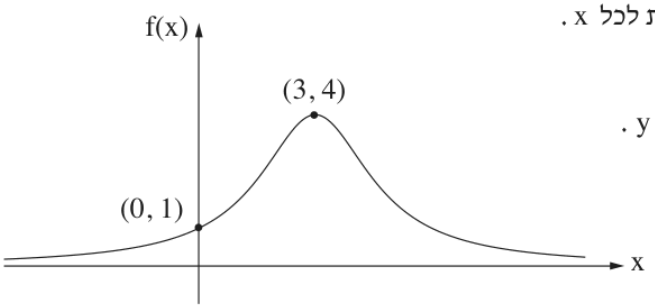
IV. $f(x)=-x\sqrt{x-6}$

(1) קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x)=(f(x))^2$ המוגדרת בתחום $x\le 6$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־x.

ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.



לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד

ואסימפטוטה אופקית אחת בלבד שמשוואתה היא $y=0$.

שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$

ושיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם ציר ה־y מוצגים בסרטוט.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)-2}$.

(1) כמה אסימפטוטות המאונכות לציר ה־x יש לפונקציה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה־y של הפונקציה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$b=4$

סעיף א (2)

הוכחה באינדוקציה: בדיקה, הנחה וצעד.

סעיף ב (1)

ביטוי II: $f(x)=-x\sqrt{6-x}$

סעיף ב (2)

108 יחידות שטח.

סעיף ג (1)
שתי אסימפטוטות אנכיות.

סעיף ג (2)
$y = -\frac{1}{2}$

סעיף ג (3)
שלושה ענפים: ענף שמאלי שלילי שעובר ב־$(0, -1)$; ענף אמצעי חיובי עם מינימום $(3, \frac{1}{2})$; ענף ימני שלילי.
אסימפטוטות: שתי אנכיות ו־$y = -\frac{1}{2}$.
סקיצה של g: ענף שמאלי מתחת ל־y=-1/2, ענף אמצעי בצורת U עם מינימום (3, 1/2), ענף ימני מתחת ל־y=-1/2

סעיף ד (1)
לא. אחרת מתקבלת המשוואה $q^4 - q^2 + 1 = 0$, שאין לה פתרון.

סעיף ד (2)
$BC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 1

1. ענו על <u>שניים</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקצייה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

ב. ליונתן יש בספרייה שבחדרו ספרים משני סוגים: ספרי קומיקס וספרי עיון.

60% מן הספרים הם ספרי קומיקס והשאר ספרי עיון.

70% מן הספרים הם בעברית והשאר באנגלית.

לפניכם שתי טענות I–II. קבעו בעבור כל אחת מהן אם היא נכונה או לא נכונה, ונמקו את קביעותיכם.

I. ליונתן אין ספרי קומיקס בעברית.

II. ההסתברות לבחור באקראי ספר בעברית מבין ספרי הקומיקס גדולה מן ההסתברות לבחור באקראי ספר קומיקס מבין הספרים שבעברית.

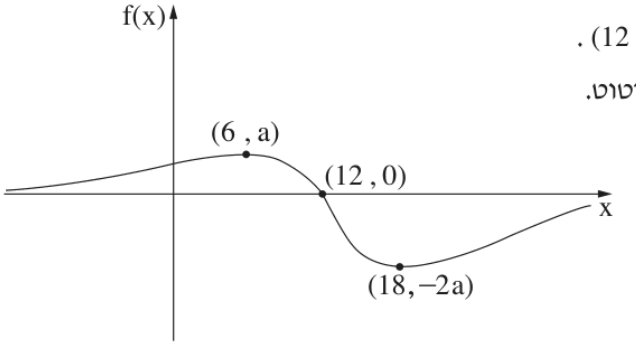
ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$, המוגדרת לכל x.

לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת בלבד, שמשוואתה $y=0$,

ונקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה־x, ששיעוריה הם $(12\ ,\ 0)$.

שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$ מוצגים בסרטוט.

a הוא פרמטר גדול מ־ 1.



נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{(f(x))^2}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתון כי לישר $y=\frac{a}{27}$ ולגרף הפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק 3 נקודות משותפות.

(3) מצאו את הערך של a.

תשובות סופיות

סעיף א

הוכחה באינדוקצייה מתמטית: בדיקה, הנחה וצעד.

סעיף ב

טענה I לא נכונה (לפחות 30% מהספרים הם קומיקס בעברית); טענה II נכונה.

סעיף ג (1)

תחום ההגדרה: $x\neq 12$

סעיף ג (2)

סקיצה: $g>0$, אסימפטוטה אנכית $x=12$, מינימום $\left(6,\frac{1}{a^2}\right)$ ומינימום $\left(18,\frac{1}{4a^2}\right)$, ואין אסימפטוטה אופקית.

סעיף ג (3)

$$a=3$$

סעיף ד (1)

$$g(x)=\frac{10}{x^3-8}+2$$

סעיף ד (2)

גרף I

בגרות חורף תשפ״ו (2026) • שאלה 1

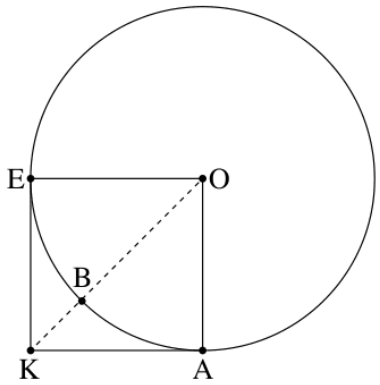
1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

דרך הנקודות A ו־E שעל המעגל העבירו שני משיקים המאונכים זה לזה.

המשיקים נחתכים בנקודה K.

הקטע KO חותך את המעגל בנקודה B.



(1) מצאו פי כמה גדול שטח המשולש AOB משטח המשולש AKB.

נתון כי שטח המשולש AOB הוא 16.

(2) מצאו את אורך הגובה לצלע AK במשולש AKB.

ב. בתחרות שחמט, שני שחקנים – יאיר ונדב – מתחרים זה נגד זה.

כל משחק יכול להסתיים באחת מ־3 התוצאות האלה: ניצחון של יאיר, ניצחון של נדב או תיקו.

בכל משחק ההסתברות שיאיר ינצח היא קבועה וגדולה פי 2 מן ההסתברות שנדב ינצח.

נסמן ב־p את ההסתברות שנדב ינצח במשחק אחד.

יאיר ונדב משחקים שני משחקים.

(1) הביעו באמצעות p את ההסתברות שאחד מן השחקנים ישיג שני ניצחונות.

ידוע שאם שום שחקן לא השיג שני ניצחונות, ההסתברות שכל אחד מן המשחקים יסתיים בתיקו היא $\frac{9}{31}$.

(2) קבעו איזו מן האפשרויות I–III שלפניכם מתאימה לערך של p. נמקו את קביעתכם.

I. $\frac{1}{10}$ **II.** $\frac{11}{27}$ **III.** $\frac{1}{6}$

תשובות סופיות

סעיף א (1)

פי $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \approx 2.41$

סעיף א (2)

אורך הגובה ≈ 1.97

סעיף ב (1)

$5p^2$

סעיף ב (2)

תשובה III: $p = \frac{1}{6}$

סעיף ג (1)

$-4 \le x \le -1$

או $1 \le x \le 4$

סעיף ג (2)

גרף IV

סעיף ד (1)

$a_1 = \frac{1}{10}$, $a_2 = \frac{1}{20}$, $a_3 = \frac{1}{40}$

סעיף ד (2)

כן, סדרה הנדסית עם $q = \frac{1}{2}$

סעיף ד (3)

$\frac{1}{5}$

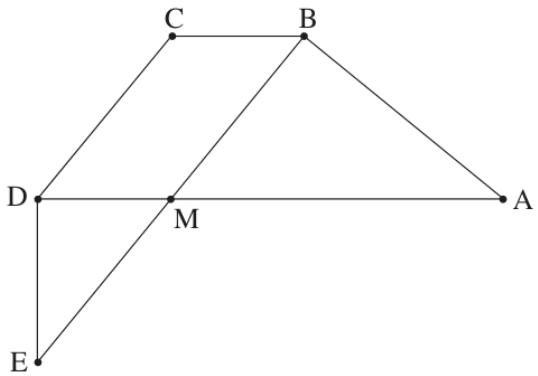
בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 1

1. ענו על <u>שניים</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקצייה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\ldots+\frac{4n-2}{3^n}=2-\frac{2n+2}{3^n}$$

ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ $(BC \parallel AD)$
וטרפז $BCDE$ $(CD \parallel BE)$.
הנקודה M היא נקודת החיתוך של הצלעות AD ו־BE.
נתון: $EM = BM$, $ED \perp AD$, $AB \perp BM$.
אורך הקטע AM גדול פי 2.5 מאורך הקטע DM.
נסמן: $\sphericalangle EMD = \alpha$.



(1) מצאו את הערך של α.

נתון: $DM = 4$.

(2) חשבו את שטח הטרפז $ABCD$.

תשובות סופיות

סעיף א
הוכחה באינדוקציה: בדיקה, הנחה וצעד.

סעיף ב (1)
$\alpha \approx 50.77^\circ$

סעיף ב (2)
$S_{ABCD} = 18\sqrt{6} \approx 44.09$

סעיף ג (1)
I – $f(x)$, n אי־זוגי
II – $g(x)$, n אי־זוגי
III – $g(x)$, n זוגי
IV – $f(x)$, n זוגי

סעיף ג (2)
$\frac{1}{30}$ יחידות שטח.

סעיף ד (1)
מקסימום (קצה) ב־$x=0$, מינימום ב־$x=1$, מקסימום ב־$x=4.5$.

סעיף ד (2)
$5S$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 1

1. ענו על <u>שניים</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. **(1)** הוכיחו באינדוקצייה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

(2) חשבו את הערך של הסכום: $4^2+6^2+8^2+\ldots+100^2$.

ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ ($AB\parallel CD$).

הנקודה O היא מפגש אלכסוני הטרפז.

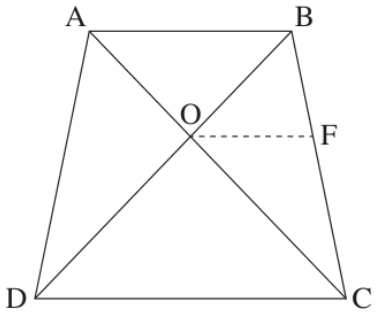
נתון: $\sphericalangle BAO=\sphericalangle CDO$.

(1) הוכיחו כי הטרפז $ABCD$ הוא שווה שוקיים.

הנקודה F נמצאת על הצלע BC כך שהקטע OF מקביל לבסיסי הטרפז.

נתון כי אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה, $DO=4$, $BO=3$.

(2) מצאו את אורך הקטע OF .



תשובות סופיות

סעיף א (1)

הוכחה באינדוקציה: בדיקה עבור $n=1$, הנחה עבור $n=k$, צעד עבור $n=k+1$.

סעיף א (2)

$171{,}696$

סעיף ב (1)

הוכחה: $OA=OB$ ו־$OC=OD$, לכן $AC=BD$ – טרפז שאלכסוניו שווים הוא שווה שוקיים.

סעיף ב (2)

$OF=\frac{12\sqrt{2}}{7}\approx 2.42$

סעיף ג (1)

גרף II – $f(x)$, גרף III – $f'(x)$, גרף I – $f''(x)$

סעיף ג (2)

3 נקודות פיתול

סעיף ג (3)

$S=3$

סעיף ד (1)

$-1<x<0$ או $x>0$

סעיף ד (2)

גרף III

סעיף ד (3)

$\frac{7}{24}$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 1

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון כי השוויון $8+24+48+\ldots+n(n+2)=\frac{n(n+a)(n+4)}{6}$ מתקיים בעבור $n=2$.

a הוא פרמטר.

(1) מצאו את הערך של a.

(2) בעבור הערך של a שמצאתם, הוכיחו באינדוקצייה או בכל דרך אחרת כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי זוגי.

ב. כל המועמדים ללימודים באוניברסיטה נבחנים בשני מבחנים.

נמצא כי מספר המועמדים שהצליחו רק במבחן הראשון קטן פי 4 ממספר המועמדים שהצליחו בשני המבחנים.

$\frac{8}{9}$ מן המועמדים שהצליחו במבחן השני, הצליחו גם במבחן הראשון.

נסמן ב־p את ההסתברות לבחור באקראי מועמד שהצליח רק במבחן הראשון.

(1) הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי מועמד שהצליח לפחות במבחן אחד.

(2) ידוע שנבחר באקראי מועמד שהצליח לפחות במבחן אחד.

מהי ההסתברות שהמועמד שנבחר הצליח בשני המבחנים?

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$a=2$

סעיף א (2)

הוכחה באינדוקציה על n זוגי: בדיקה עבור $n=2$, הנחה עבור $n=k$, וצעד עבור $n=k+2$.

סעיף ב (1)

$5.5p=\frac{11}{2}p$

סעיף ב (2)

$\frac{8}{11}\approx 0.727$

סעיף ג (1)

f: $x<-1$ או $x>1$

g: $x\geq 0$, $x\neq 1$

h: $-1<x\leq 0$ או $x>1$

סעיף ג (2)

f – גרף 3

g – גרף 1

h – גרף 5

סעיף ד (1)

f' זוגית; מתאפסת ב־$x=\pm 3$; שלילית בין -3 ל־3 וחיובית מחוץ לתחום זה; שואפת ל־0 כאשר $x\to\pm\infty$

סקיצה של f': גרף זוגי, מתאפס ב־x=-3 וב־x=3, שלילי ביניהם עם מינימום ב־x=0, חיובי מחוץ להם ושואף ל־0

סעיף ד (2)

$(-3,0),\ (0,0),\ (3,0)$

סעיף ד (3)

144 יחידות שטח

בגרות קיץ תשפ״ד (2024) – מועד ב׳ • שאלה 1

1. ענו על <u>שניים</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. **(1)** הוכיחו באינדוקצייה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

(2) האם הביטוי $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)$ שווה ל־ $\frac{n+1}{n}$ בעבור כל n טבעי? נמקו את תשובתכם.

ב. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

נסמן: $\sphericalangle ACB=\alpha$, $0^o<\alpha<90^o$.

(1) הביעו באמצעות α את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC,

ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש AOB.

נתון כי היחס שהבעתם בתת־סעיף (1) שווה ל־ $\sqrt{2}$,

וכי הצלע CB משיקה למעגל החוסם את משולש AOB.

(2) הוכיחו כי מרכז המעגל O נמצא על הצלע AC.

תשובות סופיות

סעיף א (1)
הוכחה באינדוקציה: בדיקה, הנחה וצעד.

סעיף א (2)
לא. דוגמה נגדית: עבור $n=2$ אגף שמאל הוא 8 ואגף ימין $\frac{3}{2}$.

סעיף ב (1)
$2\cos\alpha$

סעיף ב (2)
הוכחה: $\alpha=45^\circ$, ולכן AC קוטר במעגל O ועובר דרך O.

סעיף ג (1)
סקיצה:
סקיצה של f אי־זוגית: אפסים ב־-1, 0, 1, מינימום ב־-1/2 ומקסימום ב־1/2

סעיף ג (2)
$(1,2)$ ו־$(-1,2)$

סעיף ג (3)
I – לא נכונה; II – נכונה.

סעיף ד (1)
ביטוי III

סעיף ד (2)
$x \leq -6$
או $-3 \leq x \leq 1$
או $x \geq 4$

סעיף ד (3)
סקיצה:
סקיצה של g=√f בשלושה חלקים

סעיף ד (4)
$2k + 3$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 1

1. ענו על <u>שניים</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקצייה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי:

$$4+13+\ldots+\frac{5n^2+3n}{2}=\frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$$

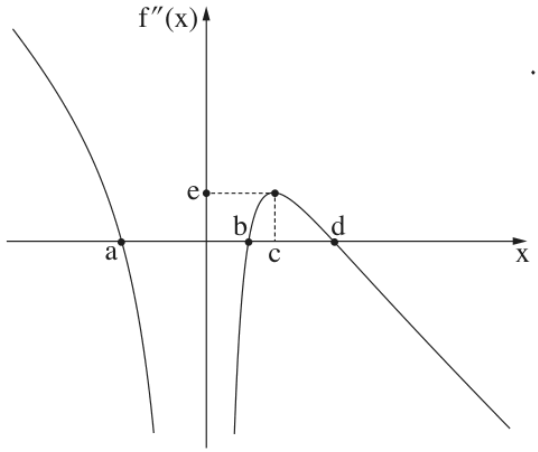
ב. נתונות הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־$f''(x)$, המוגדרות לכל $x\neq 0$.

בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

לגרף הפונקצייה $f''(x)$ יש שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה־ x ,

ושיעוריהן הם $(a\,,0)$, $(b\,,0)$, $(d\,,0)$.

הנקודה $(c\,,e)$ היא נקודת הקיצון של הפונקצייה $f''(x)$.



(1) הביעו באמצעות e , d , c , b , a , אם יש צורך,

את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)$, המקיימת: $h'(x)=f''(x)-e$.

הפונקצייה $h(x)$ מוגדרת לכל $x\neq 0$.

(2) מצאו כמה נקודות קיצון וכמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $h(x)$ (אם יש כאלה).

נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות

סעיף א

הוכחה באינדוקצייה מתמטית: בדיקה, הנחה וצעד.

סעיף ב (1)

עלייה: $x<a$ וגם $b<x<d$

ירידה: $0<x<b$,$a<x<0$ וגם $x>d$

סעיף ב (2)

ל־h נקודת קיצון אחת (מקסימום) ונקודת פיתול אחת.

סעיף ג (1)

נקודת המקסימום: $(0,3-m)$

סעיף ג (2)

מקסימום $(0,3+m)$; מינימום $(-5,m)$ ו־$(5,m)$

סעיף ג (3)

טענה I אינה נכונה; טענה II אינה נכונה.

סעיף ד (1)

הוכחה: $\angle ACD=\angle AFB=90^\circ$ ו־$\angle ADC=\angle ABF$, ולכן הדמיון לפי ז.ז.

סעיף ד (2)

היחס: $\frac{1}{\sin^2 24^\circ} \approx 6.045$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 1

1. ענו על <u>שניים</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

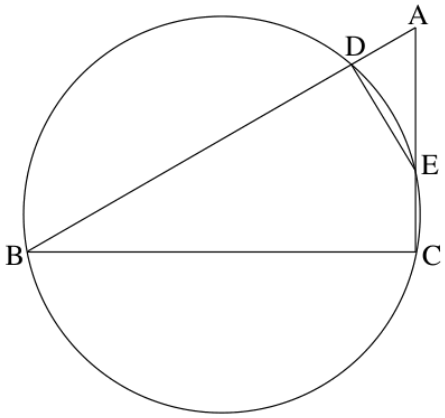
א. הוכיחו באינדוקצייה או בדרך אחרת שלכל n טבעי <u>זוגי</u> מתקיים:

$$48+144+288+...+6n(n+2)=n(n+2)(n+4)$$

ב. המרובע $BCED$ חסום במעגל.

המשך המיתר BD והמשך המיתר CE נפגשים בנקודה A (ראו סרטוט).

נתון: $AE=2CE$, $AD=CE$.



(1) הוכיחו: $\triangle AED\sim\triangle ABC$.

(2) מצאו את היחס $\frac{AB}{AC}$.

(3) נתון: $\sphericalangle DEC=150^o$.

האם BE הוא קוטר במעגל הנתון? נמקו את תשובתכם.

ג. לפניכם סרטוט של גרף הפונקצייה $f(x)$.

לפונקצייה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה־ x ושתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה־ y .

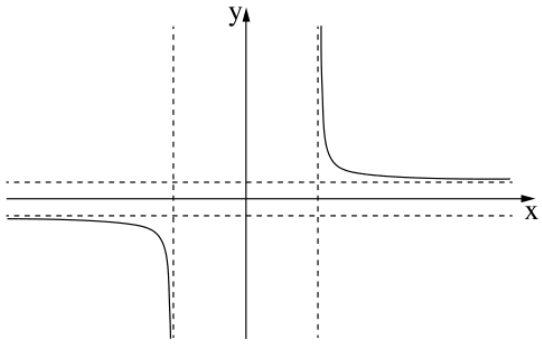
אחד מן הביטויים I–IV שלפניכם מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

I. $\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$

II. $\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$

III. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}$

IV. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}$



(1) קבעו איזה מן הביטויים I–IV מתאר את הפונקצייה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקצייה $g(x)$, המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת: $g'(x)=f(x)+\frac{5}{3}$.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$.

תשובות סופיות

סעיף א

הוכחה באינדוקציה: בדיקה ל־$n=2$, וצעד מ־k ל־$k+2$ בעזרת גורם משותף $(k+2)(k+4)$.

סעיף ב (1)

הוכחה: זווית משותפת A ו־$\angle AED=\angle ABC$ (זווית חיצונית למרובע חסום), לכן $\triangle AED\sim\triangle ABC$ לפי ז.ז.

סעיף ב (2)

$\frac{AB}{AC} = 2$

סעיף ב (3)

כן: $\angle BCE = 90^\circ$, וזווית היקפית ישרה נשענת על קוטר

סעיף ג (1)

ביטוי II: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$

סעיף ג (2)

עולה: $x < -5$, $x > 4$

יורדת: $-5 < x < -4$

סעיף ד (1)

גרף II מתאר את $f(x)$; גרף I הוא $f'(x)$

סעיף ד (2)

3 נקודות פיתול

סעיף ד (3)

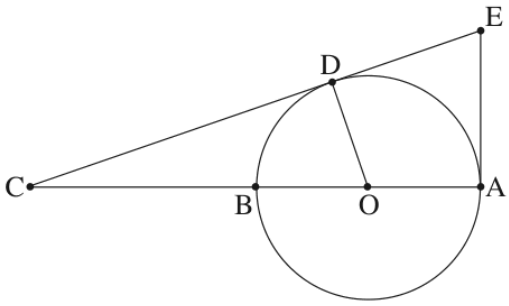
$y_C = 5$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 1

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בעבור כל n טבעי הוכיחו באינדוקצייה או בדרך אחרת כי מתקיים: $\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+...+\frac{A}{2^n}=A\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.
A הוא פרמטר.

ב. הנקודה B היא אמצע הקטע AC.
AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.
מן הנקודה C מעבירים ישר המשיק למעגל בנקודה D.
בנקודה A מעבירים משיק נוסף למעגל.
שני המשיקים נחתכים בנקודה E (ראו סרטוט).



(1) הוכיחו כי המרובע $AODE$ הוא בר חסימה במעגל.

(2) הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המרובע $AODE$.

תשובות סופיות

סעיף א
הוכחה באינדוקציה: בדיקה, הנחה וצעד.

סעיף ב (1)
הוכחה: $\angle OAE+\angle ODE=180^\circ$, ולכן המרובע בר חסימה.

סעיף ב (2)
$r=\frac{\sqrt{3}}{2}R$

סעיף ג (1)
$f(x)$ – גרף ד
$h(x)$ – גרף ג
$k(x)$ – גרף א

סעיף ג (2)
n אי־זוגי, $n\geq 3$.

סעיף ד (1)
ענף שמאלי: חיובי ועולה.
ענף ימני: שלילי ועולה.
אסימפטוטות: $x=0$, $y=0$.

סעיף ד (2)
עלייה: $x<0$ וגם $x>0$.
ירידה: אין.

סעיף ד (3)
$(3)<(4)<(2)<(1)$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 1

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

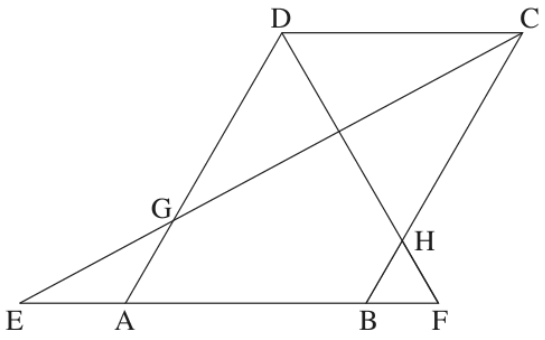
א. בסרטוט שלפניכם מקבילית $ABCD$.

הנקודות E ו־F נמצאות על המשכי הצלע AB, כמתואר בסרטוט.

הקטע EC חותך את הצלע AD בנקודה G.

הקטע FD חותך את הצלע BC בנקודה H.

נתון: $HF = 4$, $GE = 5$.



(1) מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש HBF ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש GEA.

נמקו את תשובתכם.

נתון: המרובע $ABHD$ הוא בר־חסימה במעגל,

$BH = FH$.

(2) הוכיחו כי המשולש HBF הוא שווה צלעות.

ב. ביישוב מסוים ההסתברות לבחור באקראי גבר היא 0.2, וההסתברות לבחור באקראי אישה היא 0.8.

בוחרים באקראי 4 אנשים מיישוב זה.

לפניכם שני ביטויים:

ביטוי 1: $1-0.2^4-0.8^4$

ביטוי 2: $\binom{4}{3}\cdot 0.2^3\cdot 0.8+0.2^4$

קבעו איזו מן ההסתברויות I–III שלפניכם אפשר לחשב על ידי ביטוי 1 ואיזו מהן אפשר לחשב על ידי ביטוי 2.

I. ההסתברות לבחור באקראי יותר גברים מנשים.

II. ההסתברות לבחור באקראי יותר נשים מגברים.

III. ההסתברות לבחור באקראי לפחות גבר אחד ולפחות אישה אחת.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$R_{HBF} : R_{GEA} = 4 : 5$

סעיף א (2)

הוכחה: הזוויות $\angle BHF$ ו־$\angle HBF$ שוות שתיהן ל־$\angle DAB$, ולכן $HF = BF$; יחד עם הנתון $BH = FH$ המשולש שווה צלעות.

סעיף ב

ביטוי 1 – הסתברות III; ביטוי 2 – הסתברות I.

סעיף ג (1)

גרף I – $f'(x)$, גרף II – $f''(x)$

סעיף ג (2)

הוכחה: שני השטחים שווים ל־$f'(0.4)$, כי $f'(0)=f'(1)=0$.

סעיף ד (1)

$\alpha = 120^\circ$

סעיף ד (2)

לא. $\frac{T_2}{T_1}=1$ אבל $\frac{T_3}{T_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ – המנה אינה קבועה.

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 1

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתונות שתי סדרות המוגדרות לכל n טבעי: $a_n = 2n-1$, $b_n = 2^n$.

נסמן: $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$

(1) הוכיחו כי:

אם בעבור k טבעי כלשהו מתקיים: $T_k = (2k-3)\cdot 2^{k+1}$

אז מתקיים: $T_{k+1} = (2k-1)\cdot 2^{k+2}$

לפניכם טענה: לכל n טבעי מתקיים: $T_n = (2n-3)\cdot 2^{n+1}$.

(2) הסבירו מדוע טענה זו אינה נכונה.

ב. בטרפז $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ הקטע EF הוא קטע אמצעים.

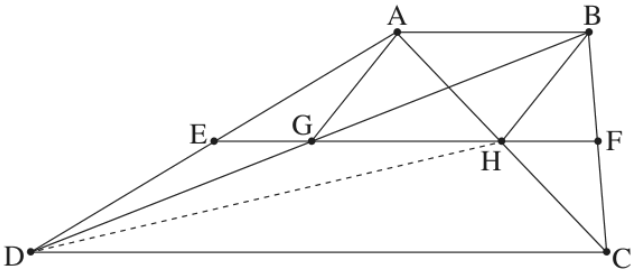
הקטע EF חותך את האלכסונים AC ו־BD של הטרפז בנקודות H ו־G בהתאמה.

נתון כי המרובע $ABHG$ הוא מקבילית.

(1) הוכיחו: $GH = 2EG$.

המשך הישר AG חותך את הקטע DH בנקודה M .

(2) הוכיחו: הקטע AM חוצה את הקטע DH .



תשובות סופיות

סעיף א (1)

הוכחה: $T_{k+1} = (2k-1)\cdot 2^{k+2}$

סעיף א (2)

הטענה אינה נכונה כבר עבור $n = 1$:

$T_1 = 2$, ואילו לפי הנוסחה מתקבל -4.

סעיף ב (1)

הוכחה: EG קטע אמצעים במשולש ABD, ולכן $EG = \frac{1}{2}AB$; במקבילית $GH = AB$, ולכן $GH = 2EG$.

סעיף ב (2)

הוכחה: במשולש DBH, G אמצע DB ו־$GM \parallel BH$, ולכן M אמצע DH.

סעיף ג (1)

$f(x)$ – גרף II

$f'(x)$ – גרף III

$f''(x)$ – גרף I

סעיף ג (2)

$y = -6x + 2.8$

סעיף ג (3)

-6

סעיף ד (1)

$0 < a < 1$

סעיף ד (2)

$k = 2$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 1

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \ldots + (3n-2)(5n-3) = n(5n^2 - 2n - 1)$$

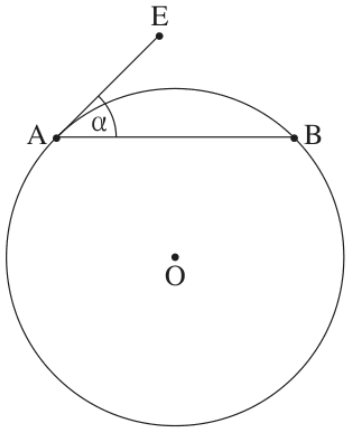
(1) חשבו את הערך של הביטוי: $7 \cdot 12 + 10 \cdot 17 + \ldots + 58 \cdot 97$

ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \ldots + (3n-2)(5n-3) + (3n+1)(5n+2) = (n+1)(5n^2 + 8n + C)$$

(2) מצאו את הערך של C.

ב. הנקודה A נמצאת על מעגל שמרכזו O. מעבירים משיק למעגל בנקודה A, והוא יוצר זווית של α מעלות עם המיתר AB (ראו סרטוט).



(1) הביעו באמצעות α את הזווית AOB.

(2) הביעו באמצעות α את היחס בין אורך הקשת הקטנה AB ובין היקף המעגל.

ג. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ המוגדרת לכל x השונה מ־ 0.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) נתונה הפונקצייה $g(x) = k \cdot f(x+3)$, $k > 0$ הוא פרמטר.

מצאו את הערך של k שעבורו המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקצייה $g(x)$ הוא 10.

נמקו את תשובתכם.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

39150

סעיף א (2)

$C = 2$

סעיף ב (1)

$\angle AOB = 2\alpha$

סעיף ב (2)

$\frac{\alpha}{180}$

סעיף ג (1)

אנכית: $x = 0$

אופקית (מימין): $y = 2$

אופקית (משמאל): $y = -2$

סעיף ג (2)
$k = 2.5$

סעיף ד (1)
$-2 < t < 0$

סעיף ד (2)
לא. הפונקציה אינה חיובית בשום מקום בתחום.

סעיף ד (3)
כן. בנקודות הקיצון של f (מינימום ומקסימום).

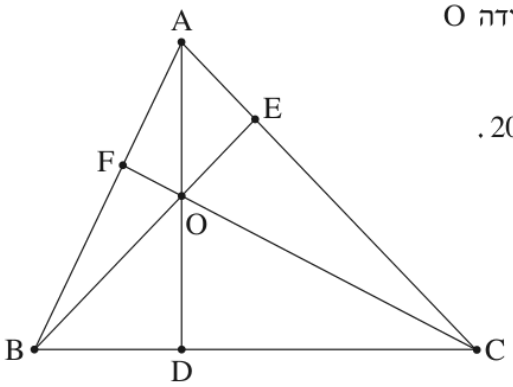
בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 1

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות במחברת.

א. הוכיחו באינדוקצייה או בכל דרך אחרת כי בעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

ב. במשולש חד זוויות ABC, הגבהים AD, BE, CF נפגשים בנקודה O (ראו סרטוט).



נתון כי סכום המרחקים של הנקודה O מקודקודי המשולש הוא 20.

(1) הוכיחו שאפשר לחסום במעגל כל אחד מן המרובעים $AEOF, BDOF, CDOE$.

(2) מהו סכום ההיקפים של המעגלים החוסמים את המרובעים $AEOF, BDOF, CDOE$?

ג. נתונה הפונקצייה $f(x)=3+\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$?

(2) ידוע כי האסימפטוטות של גרף הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים, חותכות זו את זו. חשבו את השטח הכלוא בין האסימפטוטות. נמקו את התשובה.

תשובות סופיות

סעיף א

הוכחה באינדוקצייה מתמטית: בדיקה, הנחה וצעד

סעיף ב (1)

הוכחה: בכל מרובע יש שתי זוויות נגדיות ישרות, שסכומן 180°

סעיף ב (2)

20π

סעיף ג (1)

$x<-5$ או $x>5$

סעיף ג (2)

20 יחידות שטח

סעיף ד (1)

גרף ב

סעיף ד (2)

גרף ה

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 1

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות במחברת.

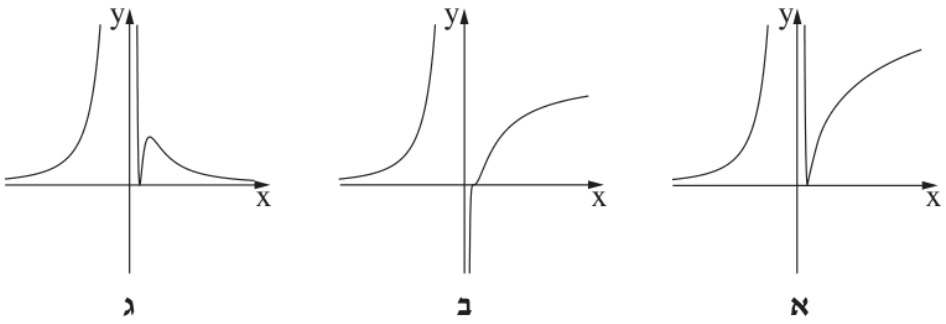
א. **(1)** בעבור כל n טבעי, הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי הביטוי $4^n - 1$ מתחלק ב־ 3 ללא שארית.

(2) נתון: p הוא מספר שלם.

כתבו דוגמה לערך של p שבעבורו הביטוי $4^{n+1} + p$ מתחלק ב־ 12 ללא שארית, לכל n טבעי.

ב. נתונה הפונקצייה: $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^3$.

(1) אחד מן הגרפים א–ג מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם ונמקו בקצרה.



א ב ג

(2) קבעו כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $f(x)$. נמקו את התשובה.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

הוכחה באינדוקציה. בצעד האינדוקציה:

$4^{k+1} - 1 = 4(4^k - 1) + 3$

ושני המחוברים מתחלקים ב־3.

סעיף א (2)

לדוגמה $p = 8$.

מתאים כל p שעבורו $p + 4$ מתחלק ב־12.

סעיף ב (1)

גרף ג

סעיף ב (2)

2 נקודות פיתול: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ו־$(1, 1)$

סעיף ג (1)

$h(0) = 0$, $h(3) = 7$, $h(5) = 5$

סעיף ג (2)

$3 < t < 7$, כי שם $h'(t) = f(t) < 0$

סעיף ד

$\angle D = \angle E = 2\alpha$

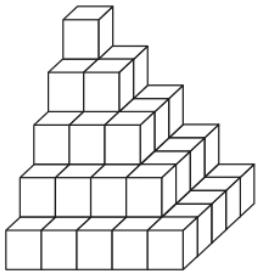
$\angle F = 180^\circ - 4\alpha$

בגרות חורף נבצרים תשפ״ב (2022) • שאלה 1

1. ענה על <u>שלושה</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניך. אם תענה על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

א. נתון מרובע $ABCD$ שבו גודלי הזוויות מהווים סדרה חשבונית עולה. איברי הסדרה הם a_1, a_2, a_3, a_4.
הוכח כי אם מתקיים $\sphericalangle A = a_1$, $\sphericalangle B = a_2$, $\sphericalangle C = a_4$, $\sphericalangle D = a_3$, אז אפשר לחסום את המרובע $ABCD$ במעגל.

ב. נתון מגדל קוביות ובו 5 קומות (ראה ציור).



הקומה התחתונה בנויה מ־ 25 קוביות המסודרות בצורת ריבוע.
הקומה שמעליה בנויה מ־ 16 קוביות המסודרות בצורת ריבוע.
וכך הלאה עד לקומה העליונה שבה יש קובייה אחת.

(1) כמה קוביות סך הכול דרושות כדי לבנות באותו אופן מגדל שבו 7 קומות?

(2) נתון מגדל ובו 10 קומות הבנוי באותו אופן שבו בנוי המגדל המתואר בתחילת סעיף ב.
כמה קוביות צריך להוסיף למגדל זה, כדי שיהיו בו 100 קומות הבנויות באותו אופן? פרט את חישוביך.
תוכל להיעזר בנוסחה (לכל n טבעי): $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

ג. נתונה הפונקציה $f(x) = [\cos(x-\pi) + \cos(\pi - x)]^2 + 4(\sin(-x))^2 - 5$ המוגדרת לכל x.
האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה־ x? נמק את תשובתך.

תשובות סופיות

סעיף א
הוכחה: מתקיים $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$, ולכן סכום כל זוג זוויות נגדיות הוא 180°.

סעיף ב (1)
140 קוביות.

סעיף ב (2)
337,965 קוביות.

סעיף ג
לא. $f(x) = -1$ לכל x.

סעיף ד (1)
$x \neq \pm 1$ וגם $x \neq 2$

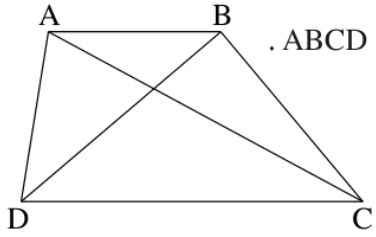
סעיף ד (2)
ב־4 נקודות.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 1

1. ענה על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניך. אם תענה על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות במחברתך.

א. לפניך טרפז $ABCD$ $(AB \parallel CD)$.

נתון: שטח המשולש ADC הוא 24 ושטח המשולש ADB הוא 12.



(1) חשב את היחס בין אורך הבסיס הגדול ובין אורך הבסיס הקטן של הטרפז $ABCD$.

(2) חשב את שטח הטרפז $ABCD$.

ב. **(1)** בעבור כל n טבעי, הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת את הטענה:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$

(2) חשב את המכפלה:

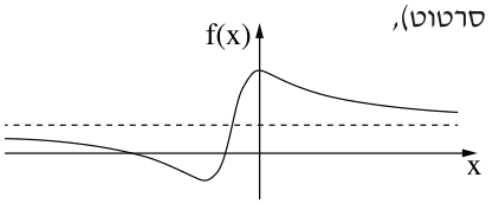
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

ג. בעבור כל אחת מן הטענות (1)–(2) שלפניך, קבע אם היא נכונה לכל x. נמק.

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

ד. לפניך הגרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x.



לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אופקית שמשוואתה היא $y=1$ (ראה סרטוט),

ו־2 נקודות קיצון בדיוק:

נקודת מקסימום $(0\ ,\ 3)$

ונקודת מינימום $(-2\ ,\ -1)$.

נגדיר את הפונקציה $g(x)=f(-x)+1$. גם הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x.

(1) מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$. נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

תשובות סופיות

סעיף א (1)

$\frac{DC}{AB}=2$

סעיף א (2)

$S_{ABCD}=36$

סעיף ב (1)

הוכחה באינדוקציה: בדיקה עבור $n=1$, הנחה עבור $n=k$, צעד עבור $n=k+1$.

סעיף ב (2)

50

סעיף ג (1)
נכונה לכל x – שני האגפים שווים ל־$\cos x$.

סעיף ג (2)
לא נכונה לכל x (למשל עבור $x = 0$ מתקבל $1 \neq -1$).

סעיף ד (1)
$y = 2$

סעיף ד (2)
מקסימום $(0, 4)$, מינימום $(2, 0)$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.