שאלות קצרות – כל השאלות עם פתרונות מלאים

הכנה לבגרות במתמטיקה – 5 יחידות, כיתה י״א (שאלון 571) • 17 שאלות

בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 1

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

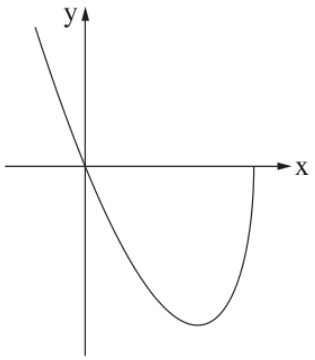
א. נתון כי השוויון $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{b}$ מתקיים בעבור $n=2$.

b הוא פרמטר שונה מ־ 0.

(1) מצאו את הערך של b.

(2) הציבו $b=4$ והוכיחו באינדוקצייה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי.

ב. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x\le 6$.



אחד מן הביטויים I–IV שלפניכם מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

I. $f(x)=x\sqrt{6-x}$

II. $f(x)=-x\sqrt{6-x}$

III. $f(x)=x\sqrt{x-6}$

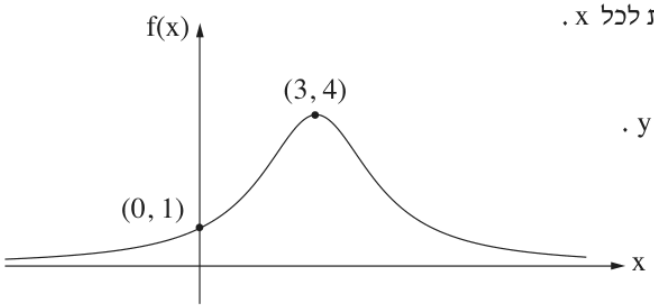
IV. $f(x)=-x\sqrt{x-6}$

(1) קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקצייה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקצייה $g(x)=(f(x))^2$ המוגדרת בתחום $x\le 6$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ x.

ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת לכל x.



לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד

ואסימפטוטה אופקית אחת בלבד שמשוואתה היא $y=0$.

שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$

ושיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$

עם ציר ה־ y מוצגים בסרטוט.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{f(x)-2}$.

(1) כמה אסימפטוטות המאונכות לציר ה־ x יש לפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה־ y של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

פתרון מלא

סעיף א (1)

נציב $n=2$ בשוויון. באגף שמאל יש שני מחוברים:

$$1^3+2^3=1+8=9$$

באגף ימין:

$$\frac{2^2 \cdot (2+1)^2}{b} = \frac{4 \cdot 9}{b} = \frac{36}{b}$$

נשווה:

$$\frac{36}{b} = 9 \;\Rightarrow\; b = 4$$

תשובה: $b = 4$

סעיף א (2)

נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

בדיקה עבור $n = 1$**:** באגף שמאל $1^3 = 1$, ובאגף ימין:

$$\frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = 1 \quad \checkmark$$

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

צעד: נוכיח עבור $n = k+1$, כלומר צריך להראות:

$$1^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

לפי ההנחה, סכום k המחוברים הראשונים שווה ל־$\frac{k^2(k+1)^2}{4}$, ולכן אגף שמאל שווה ל:

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

נוציא גורם משותף $\frac{(k+1)^2}{4}$:

$$= \frac{(k+1)^2}{4}\left(k^2 + 4(k+1)\right)$$
$$= \frac{(k+1)^2}{4}\left(k^2 + 4k + 4\right)$$
$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

קיבלנו את אגף ימין, ולכן הטענה נכונה עבור $n = k+1$. לפי עקרון האינדוקציה השוויון נכון לכל n טבעי.

תשובה: הוכחה באינדוקציה: בדיקה, הנחה וצעד.

סעיף ב (1)

תחום ההגדרה: לפי הגרף הפונקציה מוגדרת רק משמאל ל־$x = 6$, כלומר:

$$x \leq 6$$

בביטויים III ו־IV מופיע $\sqrt{x-6}$, שמוגדר רק עבור $x \geq 6$ – הם לא מתאימים.

סימן הפונקציה: לפי הגרף, בין $x = 0$ ל־$x = 6$ הגרף נמצא **מתחת** לציר ה־x, כלומר הפונקציה שלילית שם.

ביטוי I: בתחום $0 < x < 6$ שני הגורמים x ו־$\sqrt{6-x}$ חיוביים, ולכן $x\sqrt{6-x}$ חיובי – לא מתאים.

ביטוי II: בתחום $0 < x < 6$ הביטוי $-x\sqrt{6-x}$ שלילי, ומשמאל ל־0 הוא חיובי – בדיוק כמו בגרף ✓.

תשובה: ביטוי II: $f(x) = -x\sqrt{6-x}$

סעיף ב (2)

$$g(x) = \left(-x\sqrt{6-x}\right)^2$$
$$= x^2(6-x) = 6x^2 - x^3$$

$g(x) \geq 0$ בכל התחום, ו־$g(x) = 0$ רק עבור $x = 0$ ו־$x = 6$. עבור $x < 0$ הגרף עולה ללא גבול, ולכן השטח המוגבל נמצא בין $x = 0$ ל־$x = 6$:

$$S = \int_0^6 \left(6x^2 - x^3\right) dx$$
$$= \left[2x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^6$$
$$= 2 \cdot 216 - \frac{1296}{4} - 0$$
$$= 432 - 324 = 108$$

תשובה: 108 יחידות שטח.

סעיף ג (1)

אסימפטוטה המאונכת לציר ה־x (אנכית) של הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)-2}$ מתקבלת כאשר המכנה מתאפס, כלומר כאשר:

$$f(x) = 2$$

לפי הסרטוט: משמאל ל־$x = 3$ הפונקציה f עולה מערכים הקרובים ל־0 עד 4 (המקסימום), ומימין ל־$x = 3$ היא יורדת מ־4 לערכים הקרובים ל־0.
לכן הערך 2 (שבין 0 ל־4) מתקבל פעם אחת בתחום העלייה ופעם אחת בתחום הירידה. בכל אחת משתי הנקודות האלה המונה הוא 1 והמכנה 0 – אסימפטוטה אנכית.
תשובה: שתי אסימפטוטות אנכיות.

סעיף ג (2)

כאשר $x \to \pm\infty$ מתקיים $f(x) \to 0$ (האסימפטוטה האופקית של f היא $y = 0$), ולכן:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)-2} \;\to\; \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

תשובה: $y = -\frac{1}{2}$

סעיף ג (3)

נסמן ב־x_1 וב־x_2 את שתי הנקודות שבהן $f(x) = 2$ (האסימפטוטות האנכיות מסעיף ג (1)). מכיוון ש־$f(0) = 1$ קטן מ־2, הנקודה x_1 נמצאת בין 0 ל־3, והנקודה x_2 מימין ל־3.

נקודות על הגרף:

$$g(0) = \frac{1}{1-2} = -1$$
$$g(3) = \frac{1}{4-2} = \frac{1}{2}$$

סימן: בין x_1 ל־x_2 מתקיים $f(x) > 2$, ולכן g חיובית. משמאל ל־x_1 ומימין ל־x_2 מתקיים $f(x) < 2$, ולכן g שלילית.
עלייה וירידה:

$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{\left(f(x)-2\right)^2}$$

לכן g יורדת כאשר f עולה (משמאל ל־3), ועולה כאשר f יורדת (מימין ל־3). בנקודה $(3, \frac{1}{2})$ יש ל־g מינימום.

אסימפטוטות: שתי אנכיות (x_1, x_2) ואופקית $y = -\frac{1}{2}$.

סקיצה של g: ענף שמאלי מתחת ל־y=-1/2, ענף אמצעי בצורת U עם מינימום (3, 1/2), ענף ימני מתחת ל־y=-1/2

(המיקום המדויק של x_1 ושל x_2 אינו נתון, ולכן הם מסומנים בסקיצה בלי ערך.)

תשובה: שלושה ענפים: ענף שמאלי שלילי שעובר ב־$(0, -1)$; ענף אמצעי חיובי עם מינימום $(3, \frac{1}{2})$; ענף ימני שלילי. אסימפטוטות: שתי אנכיות ו־$y = -\frac{1}{2}$.

סקיצה של g: ענף שמאלי מתחת ל־y=-1/2, ענף אמצעי בצורת U עם מינימום (3, 1/2), ענף ימני מתחת ל־y=-1/2

סעיף ד (1)

במשולש ישר־זווית ($\angle A = 90°$) היתר BC הוא הצלע הארוכה ביותר.

נניח ש־BC הוא האיבר השני. אז:

$$AB = 1, \quad BC = q, \quad AC = q^2$$

לפי משפט פיתגורס:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \;\Rightarrow\; 1 + q^4 = q^2$$
$$q^4 - q^2 + 1 = 0$$

זו משוואה ריבועית ב־q^2, והדיסקרימיננטה שלה שלילית:

$$(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

אין פתרון, ולכן BC אינו יכול להיות האיבר השני.

(נימוק נוסף: אם $q > 1$ האיבר השלישי AC ארוך מ־BC, ואם $q < 1$ אז BC קצר מ־AB. בשני המקרים BC אינו הצלע הארוכה.)

תשובה: לא. אחרת מתקבלת המשוואה $q^4 - q^2 + 1 = 0$, שאין לה פתרון.

סעיף ד (2)

לפי סעיף ד (1), האיבר השני הוא AC והשלישי הוא BC:

$$AB = 1, \quad AC = q, \quad BC = q^2$$

לפי משפט פיתגורס:

$$1 + q^2 = q^4 \;\Rightarrow\; q^4 - q^2 - 1 = 0$$
$$q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$q^2 > 0$, ולכן $q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$BC = q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

תשובה: $BC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 1

1. ענו על <u>שניים</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקצייה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

ב. ליונתן יש בספרייה שבחדרו ספרים משני סוגים: ספרי קומיקס וספרי עיון.

60% מן הספרים הם ספרי קומיקס והשאר ספרי עיון.

70% מן הספרים הם בעברית והשאר באנגלית.

לפניכם שתי טענות I–II. קבעו בעבור כל אחת מהן אם היא נכונה או לא נכונה, ונמקו את קביעותיכם.

I. ליונתן אין ספרי קומיקס בעברית.

II. ההסתברות לבחור באקראי ספר בעברית מבין ספרי הקומיקס גדולה מן ההסתברות לבחור באקראי ספר קומיקס מבין הספרים שבעברית.

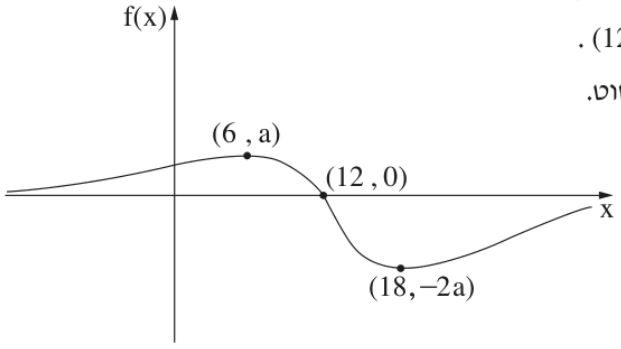
ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$, המוגדרת לכל x.

לפונקצייה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת בלבד, שמשוואתה $y=0$,

ונקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה־ x, ששיעוריה הם $(12\ ,\ 0)$.

שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$ מוצגים בסרטוט.

a הוא פרמטר גדול מ־ 1.



נתונה הפונקצייה $g(x)=\frac{1}{(f(x))^2}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתון כי לישר $y=\frac{a}{27}$ ולגרף הפונקצייה $g(x)$ יש בדיוק 3 נקודות משותפות.

(3) מצאו את הערך של a.

פתרון מלא

סעיף א

נוכיח שלכל n טבעי:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

שלב 1 – בדיקה עבור $n=1$:

אגף שמאל: $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}=\dfrac{1}{3}$

אגף ימין: $\dfrac{1\cdot 2}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{3}$

האגפים שווים, ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב 2 – הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

שלב 3 – צעד: נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, כלומר:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\cdots+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

באגף שמאל, סכום האיברים עד האיבר ה־k שווה **לפי ההנחה** ל־$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$, ולכן אגף שמאל שווה ל:

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

נוציא את $\frac{k+1}{2k+1}$ כגורם משותף:

$$=\frac{k+1}{2k+1}\left(\frac{k}{2}+\frac{k+1}{2k+3}\right)$$

$$=\frac{k+1}{2k+1}\cdot\frac{k(2k+3)+2(k+1)}{2(2k+3)}$$

$$=\frac{k+1}{2k+1}\cdot\frac{2k^2+5k+2}{2(2k+3)}$$

נפרק את הטרינום:

$$2k^2+5k+2=(2k+1)(k+2)$$

ולכן:

$$=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{(2k+1)\cdot 2(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

קיבלנו את אגף ימין. לפי עקרון האינדוקצייה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחה באינדוקצייה מתמטית: בדיקה, הנחה וצעד.

סעיף ב

נגדיר את המאורעות: C – הספר הוא ספר קומיקס, H – הספר הוא בעברית. לפי הנתונים:

$$P(C)=0.6$$

$$P(H) = 0.7$$

טענה I: לפי נוסחת החיבור:

$$P(C \cap H) =$$
$$P(C) + P(H) - P(C \cup H)$$

הסתברות של מאורע היא לכל היותר 1, כלומר $P(C \cup H) \leq 1$, ולכן:

$$P(C \cap H) \geq 0.6 + 0.7 - 1$$
$$P(C \cap H) \geq 0.3$$

כלומר לפחות 30% מהספרים הם ספרי קומיקס בעברית, ולכן יש לו ספרי קומיקס בעברית. **טענה I אינה נכונה.**

טענה II: לפי הגדרת ההסתברות המותנית:

$$P(H/C) = \frac{P(C \cap H)}{P(C)} = \frac{P(C \cap H)}{0.6}$$
$$P(C/H) = \frac{P(C \cap H)}{P(H)} = \frac{P(C \cap H)}{0.7}$$

המונים שווים וחיוביים (לפחות 0.3), והמכנה בשבר הראשון קטן יותר, ולכן $P(H/C) > P(C/H)$. **טענה II נכונה.**

תשובה: טענה I לא נכונה (לפחות 30% מהספרים הם קומיקס בעברית); טענה II נכונה.

סעיף ג (1)

$g(x) = \frac{1}{f^2(x)}$ מוגדרת כאשר $f(x)$ מוגדרת ו־$f(x) \neq 0$.

$f(x)$ מוגדרת לכל x, ולפי הגרף היא מתאפסת רק ב־$x = 12$ (חותכת את ציר ה־x רק בנקודה זו).

תשובה: תחום ההגדרה: $x \neq 12$

סעיף ג (2)

אסימפטוטות: ב־$x = 12$ מתקיים $f(x) \to 0$, ולכן $g(x) \to +\infty$: אסימפטוטה אנכית $x = 12$.

כאשר $x \to \pm\infty$ גם $f(x) \to 0$ (האסימפטוטה $y = 0$), ולכן $g(x) \to +\infty$ – ל־g אין אסימפטוטה אופקית.

חיוביות: $g(x) = \frac{1}{f^2(x)} > 0$ לכל x בתחום.

נקודות קיצון: נגזור:

$$g'(x) = \frac{-2f'(x)}{f^3(x)}$$

$g'(x) = 0$ רק כאשר $f'(x) = 0$, כלומר ב־$x = 6$ וב־$x = 18$.

x	f'	f	g'	g
$x < 6$	$+$	$+$	$-$	↘
6	0	a	0	מינ'
$6 < x < 12$	$+$	$+$	$-$	↗
$12 < x < 18$	$-$	$+$	$-$	↘
18	0	$-2a$	0	מינ'
$x > 18$	$+$	$-$	$+$	↗

לכן ל־g שתי נקודות מינימום:

$$g(6) = \frac{1}{a^2}$$
$$g(18) = \frac{1}{(-2a)^2} = \frac{1}{4a^2}$$

כיוון ש־$a > 1$, המינימום הימני נמוך יותר: $\frac{1}{4a^2} < \frac{1}{a^2}$.

סקיצה של g: אסימפטוטה אנכית x=12, מינימום ב-(6, 1/a²) ומינימום ב-(18, 1/(4a²))

תשובה: סקיצה: $g > 0$, אסימפטוטה אנכית $x = 12$, מינימום $(6, \frac{1}{a^2})$ ומינימום $(18, \frac{1}{4a^2})$, ואין אסימפטוטה אופקית.

סעיף ג (3)

נבדוק כמה נקודות חיתוך יש לישר אופקי $y = c$ עם הגרף של g (לפי הסקיצה):

- $c > \frac{1}{a^2}$: ארבע נקודות.
- $c = \frac{1}{a^2}$: **שלוש נקודות** – נקודת המינימום $(6, \frac{1}{a^2})$ ועוד שתי נקודות בענף הימני.
- $\frac{1}{4a^2} < c < \frac{1}{a^2}$: שתי נקודות.
- $c = \frac{1}{4a^2}$: נקודה אחת.

לכן בדיוק שלוש נקודות חיתוך מתקבלות רק כאשר הישר עובר דרך המינימום השמאלי:

$$\frac{a}{27} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$$

$a = 3$ מקיים $a > 1$.

תשובה: $a = 3$

סעיף ד (1)

$g'(x) = f(x)$, ולכן $g(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$:

$$g(x) = \int \frac{-30x^2}{(x^3-8)^2}\,dx$$

המונה הוא כמעט הנגזרת של הביטוי שבסוגריים: $(x^3-8)' = 3x^2$, ו־$-30x^2 = -10 \cdot 3x^2$. לכן:

$$g(x) = -10\int \frac{3x^2}{(x^3-8)^2}\,dx$$
$$g(x) = \frac{10}{x^3-8} + C$$

בדיקה בגזירה:

$$\left(\frac{10}{x^3-8}\right)' = \frac{-10\cdot 3x^2}{(x^3-8)^2}\ \checkmark$$

נציב $g(0) = 0.75$:

$$\frac{10}{0-8} + C = 0.75$$
$$-1.25 + C = 0.75 \Rightarrow C = 2$$

תשובה: $g(x) = \frac{10}{x^3-8} + 2$

סעיף ד (2)

- לכל $x \neq 2$:

$$g'(x) = \frac{-30x^2}{(x^3-8)^2} \leq 0$$

ולכן g **יורדת** בכל קטע של תחום ההגדרה. זה פוסל את גרף III (יש בו מינימום) ואת גרף IV (עולה).

- $g'(0) = f(0) = 0$, ולכן לגרף של g יש משיק אופקי בנקודה $(0, 0.75)$. בגרף I יש משיק אופקי על ציר ה־y, ובגרף II אין.

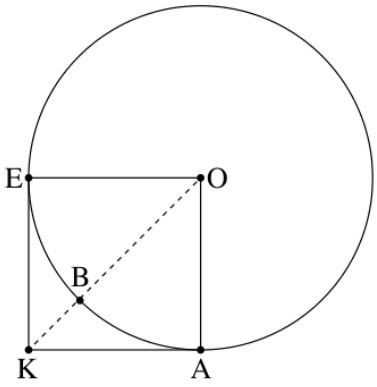
בנוסף, בגרף I רואים אסימפטוטה אנכית $x = 2$ (המכנה $x^3 - 8$ מתאפס) ואסימפטוטה אופקית $y = 2$, כמצופה.

תשובה: גרף I

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 1

1. ענו על <u>שניים</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.



דרך הנקודות A ו־E שעל המעגל העבירו שני משיקים המאונכים זה לזה.

המשיקים נחתכים בנקודה K.

הקטע KO חותך את המעגל בנקודה B.

(1) מצאו פי כמה גדול שטח המשולש AOB משטח המשולש AKB.

נתון כי שטח המשולש AOB הוא 16.

(2) מצאו את אורך הגובה לצלע AK במשולש AKB.

ב. בתחרות שחמט, שני שחקנים – יאיר ונדב – מתחרים זה נגד זה.

כל משחק יכול להסתיים באחת מ־3 התוצאות האלה: ניצחון של יאיר, ניצחון של נדב או תיקו.

בכל משחק ההסתברות שיאיר ינצח היא קבועה וגדולה פי 2 מן ההסתברות שנדב ינצח.

נסמן ב־p את ההסתברות שנדב ינצח במשחק אחד.

יאיר ונדב משחקים שני משחקים.

(1) הביעו באמצעות p את ההסתברות שאחד מן השחקנים ישיג שני ניצחונות.

ידוע שאם שום שחקן לא השיג שני ניצחונות, ההסתברות שכל אחד מן המשחקים יסתיים בתיקו היא $\frac{9}{31}$.

(2) קבעו איזו מן האפשרויות I–III שלפניכם מתאימה לערך של p. נמקו את קביעתכם.

I. $\frac{1}{10}$ **II.** $\frac{11}{27}$ **III.** $\frac{1}{6}$

פתרון מלא

סעיף א (1)

KA ו־KE משיקים, ולכן $OA \perp KA$ ו־$OE \perp KE$ (רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה). נתון $KA \perp KE$, ולכן במרובע $AOEK$ שלוש זוויות ישרות – זהו מלבן, ומכיוון ש־$OA = OE = R$ הוא ריבוע.

לכן $AK = R$, והאלכסון KO חוצה את הזווית: $\angle AOK = \angle AKO = 45^\circ$.

אורך האלכסון בריבוע שצלעו R:

$$KO = R\sqrt{2}$$

B על המעגל, לכן $OB = R$ ו־

$$KB = KO - OB = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1)$$

נחשב את שני השטחים בנוסחה $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$:

$$S_{AOB} = \tfrac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin 45^\circ$$

$$S_{AKB} = \tfrac{1}{2} \cdot R \cdot R(\sqrt{2}-1) \cdot \sin 45^\circ$$

היחס:

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AKB}} = \frac{R}{R(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$
$$= \sqrt{2}+1 \approx 2.414$$

תשובה: פי $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \approx 2.41$

סעיף א (2)

נמצא את R משטח המשולש AOB:

$$\tfrac{1}{2}R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$
$$R^2 = \frac{64}{\sqrt{2}} = 32\sqrt{2} \;\Rightarrow\; R \approx 6.727$$

הגובה לצלע AK במשולש AKB הוא האנך BH מ־B לישר AK. במשולש ישר הזווית BHK $\angle BKH = 45^\circ$, ולכן:

$$BH = KB \cdot \sin 45^\circ$$
$$= R(\sqrt{2}-1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$
$$\approx 6.727 \cdot 0.2929 \approx 1.97$$

בדיקה: $S_{AKB} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 6.727 \cdot 1.97 \approx 6.63$, ואכן $16 : 6.63 \approx 2.41$ כמו בסעיף הקודם.

תשובה: אורך הגובה ≈ 1.97

סעיף ב (1)

בכל משחק: $P(\text{נדב מנצח}) = p$, $P(\text{יאיר מנצח}) = 2p$, ולכן $P(\text{תיקו}) = 1-3p$.

„אחד השחקנים ניצח פעמיים" – או שנדב ניצח בשני המשחקים, או שיאיר ניצח בשניהם (המשחקים בלתי תלויים):

$$p \cdot p + 2p \cdot 2p = p^2 + 4p^2 = 5p^2$$

תשובה: $5p^2$

סעיף ב (2)

נסמן: A – שני המשחקים הסתיימו בתיקו, B – אף שחקן לא ניצח פעמיים. ידוע ש־B התרחש, ולכן המבוקש הוא $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

אם שני המשחקים תיקו, אף שחקן לא ניצח פעמיים: A מוכל ב־B, ולכן $P(A \cap B) = P(A) = (1-3p)^2$. B הוא המשלים של המאורע מסעיף ב (1): $P(B) = 1-5p^2$. נציב:

$$P(A/B) = \frac{(1-3p)^2}{1-5p^2}$$

נשווה לנתון:

$$\frac{(1-3p)^2}{1-5p^2} = \frac{9}{31}$$

$$31(1-6p+9p^2) = 9-45p^2$$
$$324p^2 - 186p + 22 = 0$$
$$162p^2 - 93p + 11 = 0$$
$$p_{1,2} = \frac{93 \pm 39}{324}$$
$$p_1 = \frac{11}{27}, \quad p_2 = \frac{1}{6}$$

ההסתברות לתיקו היא $1-3p \geq 0$, כלומר $p \leq \frac{1}{3}$. $\frac{1}{27} > \frac{1}{3}$ – אז $1-3p < 0$, ולכן נפסל.

$$p = \frac{1}{6}$$

תשובה: תשובה III: $p = \frac{1}{6}$

סעיף ג (1)

הביטוי שבתוך כל שורש חייב להיות אי־שלילי:

$$x^2 - 1 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 1 \text{ או } x \leq -1$$
$$16 - x^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; -4 \leq x \leq 4$$

החיתוך של שני התנאים – שני קטעים:

$$-4 \leq x \leq -1$$

או

$$1 \leq x \leq 4$$

תשובה: $-4 \leq x \leq -1$
או $1 \leq x \leq 4$

סעיף ג (2)

לפי תחום ההגדרה, הפונקציה אינה מוגדרת ב־$-1 < x < 1$ – ובפרט לא ב־$x = 0$. לכן גרפים I ו־II נפסלים – נשארים III ו־IV.

נחשב ערכים בקצוות התחום הימני:

$$f(1) = \sqrt{0} + 2\sqrt{15} = 2\sqrt{15} \approx 7.75$$
$$f(4) = \sqrt{15} + 2\sqrt{0} = \sqrt{15} \approx 3.87$$

כלומר $f(1) > f(4)$: הקצה הפנימי – הקרוב לציר y – גבוה מהקצה החיצוני. כך זה בגרף IV, ובגרף III להפך.

(אפשר לחזק: $f(2) = \sqrt{3} + 2\sqrt{12} = 5\sqrt{3} \approx 8.66$ גדול משני הקצוות, כלומר יש מקסימום בתוך התחום – „גבעה" ולא „עמק".)

תשובה: גרף IV

סעיף ד (1)

לכל n טבעי 2^n זוגי, ולכן $\cos(\pi \cdot 2^n) = 1$. מכאן:

$$a_n = \frac{1}{5 \cdot 2^n}$$
$$a_1 = \frac{1}{5 \cdot 2} = \frac{1}{10}$$
$$a_2 = \frac{1}{5 \cdot 4} = \frac{1}{20}$$

$$a_3 = \frac{1}{5 \cdot 8} = \frac{1}{40}$$

תשובה: $a_1 = \frac{1}{10}$, $a_2 = \frac{1}{20}$, $a_3 = \frac{1}{40}$

סעיף ד (2)

נבדוק את המנה בין שני איברים עוקבים, לכל n:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{5 \cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{5 \cdot 2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

המנה קבועה – לא תלויה ב־n, ולכן הסדרה הנדסית, עם מנה $q = \frac{1}{2}$.

תשובה: כן, סדרה הנדסית עם $q = \frac{1}{2}$

סעיף ד (3)

$|q| = \frac{1}{2} < 1$, ולכן לסדרה סכום אינסופי:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{10} \cdot 2 = \frac{1}{5}$$

תשובה: $\frac{1}{5}$

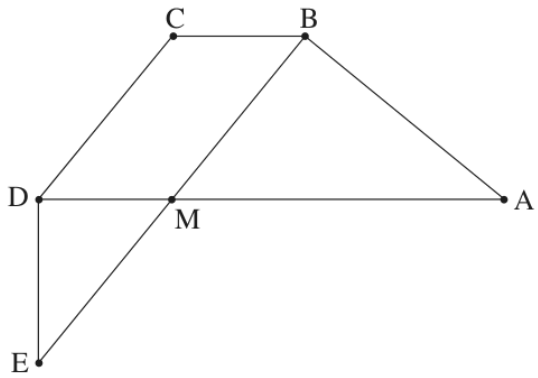
בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 1

1. ענו על <u>שניים</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקצייה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\ldots+\frac{4n-2}{3^n}=2-\frac{2n+2}{3^n}$$

ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ $(BC \parallel AD)$
וטרפז $BCDE$ $(CD \parallel BE)$.
הנקודה M היא נקודת החיתוך של הצלעות AD ו־BE.
נתון: $EM = BM$, $ED \perp AD$, $AB \perp BM$.
אורך הקטע AM גדול פי 2.5 מאורך הקטע DM.
נסמן: $\sphericalangle EMD = \alpha$.



(1) מצאו את הערך של α.

נתון: $DM = 4$.

(2) חשבו את שטח הטרפז $ABCD$.

פתרון מלא

סעיף א

נסמן את הטענה:

$$\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\cdots+\frac{4n-2}{3^n} = 2-\frac{2n+2}{3^n}$$

שלב 1 – בדיקה עבור $n=1$:

אגף שמאל: $\frac{4\cdot 1-2}{3^1}=\frac{2}{3}$

אגף ימין: $2-\frac{2+2}{3}=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$

שני האגפים שווים, ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב 2 – הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$:

$$\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\cdots+\frac{4k-2}{3^k}=2-\frac{2k+2}{3^k}$$

שלב 3 – צעד: נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, כלומר:

$$\frac{2}{3}+\cdots+\frac{4k-2}{3^k}+\frac{4k+2}{3^{k+1}} = 2-\frac{2k+4}{3^{k+1}}$$

האיבר ה־$(k+1)$ בסדרה הוא:

$$\frac{4(k+1)-2}{3^{k+1}} = \frac{4k+2}{3^{k+1}}$$

לפי ההנחה, סכום k האיברים הראשונים שווה ל:

$$2 - \frac{2k+2}{3^k}$$

לכן אגף שמאל:

$$\begin{aligned}
&2 - \frac{2k+2}{3^k} + \frac{4k+2}{3^{k+1}} \\
&= 2 - \frac{3(2k+2)}{3^{k+1}} + \frac{4k+2}{3^{k+1}} \\
&= 2 - \frac{6k+6-4k-2}{3^{k+1}} \\
&= 2 - \frac{2k+4}{3^{k+1}}
\end{aligned}$$

קיבלנו את אגף ימין. לכן אם הטענה נכונה עבור $n=k$ היא נכונה גם עבור $n=k+1$, ולפי עקרון האינדוקציה היא נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחה באינדוקציה: בדיקה, הנחה וצעד.

סעיף ב (1)

נסמן $BM = EM = m$.

במשולש EDM: נתון $AD \perp ED$, ולכן המשולש ישר־זווית והזווית D ישרה:

$$\cos\alpha = \frac{DM}{EM} \;\Rightarrow\; DM = m\cos\alpha$$

במשולש ABM: נתון $AB \perp BM$, ולכן המשולש ישר־זווית והזווית B ישרה.

הזוויות AMB ו־EMD קודקודיות, ולכן $\angle AMB = \alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{BM}{AM} \;\Rightarrow\; AM = \frac{m}{\cos\alpha}$$

נתון $AM = 2.5 \cdot DM$:

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{\cos\alpha} = 2.5\, m\cos\alpha \\
&\cos^2\alpha = \frac{1}{2.5} = 0.4 \\
&\cos\alpha = \sqrt{0.4} \approx 0.6325
\end{aligned}$$

הזווית α חדה, ולכן הקוסינוס חיובי:

$$\alpha \approx 50.77^\circ$$

תשובה: $\alpha \approx 50.77^\circ$

סעיף ב (2)

מסעיף 1 $\cos^2\alpha = 0.4$, ולכן:

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha = 1 - 0.4 = 0.6 \\
&\sin\alpha = \sqrt{0.6}
\end{aligned}$$

אורך BM: במשולש EDM:

$$EM = \frac{DM}{\cos\alpha} = \frac{4}{\sqrt{0.4}} = 2\sqrt{10}$$

ולכן $BM = EM = 2\sqrt{10}$.

אורך AM:

$$AM = 2.5 \cdot DM = 2.5 \cdot 4 = 10$$

$$AD = AM + MD = 10 + 4 = 14$$

אורך BC: במרובע $BCDM$ כל שתי צלעות נגדיות מקבילות: BC מקביל ל־MD, כי $AD \parallel BC$, ו־CD מקביל ל־BM, כי $CD \parallel BE$. לכן $BCDM$ מקבילית, וצלעות נגדיות בה שוות:

$$BC = MD = 4$$

גובה הטרפז: נוריד גובה BH מ־B לבסיס AD. במשולש ישר־הזווית BHM:

$$BH = BM\sin\alpha = 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{0.6}$$

$$= 2\sqrt{6} \approx 4.90$$

שטח הטרפז:

$$S = \frac{(AD + BC) \cdot BH}{2}$$

$$S = \frac{(14 + 4) \cdot 2\sqrt{6}}{2}$$

$$S = 18\sqrt{6} \approx 44.09$$

תשובה: $S_{ABCD} = 18\sqrt{6} \approx 44.09$

סעיף ג (1)

נמצא את נקודות החיתוך עם ציר ה־x:

$$f(x) = x^n(x-1) = 0$$

$$x = 0 \text{ או } x = 1$$

$$g(x) = x^n(x+1) = 0$$

$$x = 0 \text{ או } x = -1$$

לכן הגרפים I ו־IV (שחותכים את הציר ב־$x = 0$ ובנקודה חיובית) הם של $f(x)$, והגרפים II ו־III (שחותכים ב־$x = 0$ ובנקודה שלילית) הם של $g(x)$.

זוגיות של n: שתי הפונקציות הן פולינומים ממעלה $n+1$, והמקדם המוביל שלהן הוא 1.

- אם n אי־זוגי, המעלה $n+1$ זוגית: הגרף עולה לאינסוף בשני הקצוות. ליד $x = 0$ הגורם x^n מחליף סימן – הגרף **חותך** את הציר ב־$x = 0$.
- אם n זוגי, המעלה $n+1$ אי־זוגית: בקצה השמאלי הגרף יורד למינוס אינסוף. ליד $x = 0$ הגורם $x^n \geq 0$ אינו מחליף סימן – הגרף **משיק** לציר ב־$x = 0$.

מכאן:

- **גרף I:** של $f(x)$, שני הקצוות למעלה וחיתוך ב־$x = 0$ – n אי־זוגי.
- **גרף II:** של $g(x)$, שני הקצוות למעלה וחיתוך ב־$x = 0$ – n אי־זוגי.

- **גרף III:** של $g(x)$, הקצה השמאלי למטה ומשיק ב־$x = 0$ – n זוגי.
- **גרף IV:** של $f(x)$, הקצה השמאלי למטה ומשיק ב־$x = 0$ – n זוגי.

תשובה: I – $f(x)$, n אי־זוגי
II – $g(x)$, n אי־זוגי
III – $g(x)$, n זוגי
IV – $f(x)$, n זוגי

סעיף ג (2)

עבור $n = 4$:

$$g(x) = x^4(x+1) = x^5 + x^4$$

נקודות החיתוך עם ציר ה־x הן $x = -1$ ו־$x = 0$. בתחום שביניהן:

$$-1 \le x \le 0: \quad x^4 \ge 0,\ \ x+1 \ge 0$$

ולכן $g(x) \ge 0$ – הגרף מעל הציר, כמו בגרף III.

השטח המוגבל על ידי הגרף וציר ה־x:

$$S = \int_{-1}^{0} (x^5 + x^4)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0}$$
$$= 0 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{30}$$

תשובה: $\frac{1}{30}$ יחידות שטח.

סעיף ד (1)

הפונקציה g מוגדרת כאינטגרל של f:

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt \ \Rightarrow\ g'(x) = f(x)$$

לכן את סימן הנגזרת של g קוראים מהגרף הנתון של f.

לפי הגרף, $f(x) = 0$ ב־$x = 0,\ 1,\ 2.7,\ 4.5$. ב־$x = 2.7$ הגרף רק משיק לציר ואינו מחליף סימן.

x	$f(x) = g'(x)$	$g(x)$
$x = 0$	0	קצה התחום
$0 < x < 1$	–	יורדת
$x = 1$	0	מינימום
$1 < x < 4.5$	+	עולה
$x = 4.5$	0	מקסימום
$x > 4.5$	–	יורדת

ב־$x = 2.7$ אין קיצון, כי $g'(x)$ חיובית משני צדיה.

הנקודה $x=0$ היא קצה התחום. אחריה הפונקציה g יורדת, ולכן זו נקודת מקסימום (קצה).

שיעורי ה־x של נקודות הקיצון: $x=0$ מקסימום, $x=1$ מינימום, $x=4.5$ מקסימום.

תשובה: מקסימום (קצה) ב־$x=0$, מינימום ב־$x=1$, מקסימום ב־$x=4.5$.

סעיף ד (2)

$g(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$, ולכן לכל a, b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

השטח בין 0 ל־1: נתון $g(2.7)=0$, ולכן:

$$\int_0^{2.7} f(x)\,dx = g(2.7) - g(0) = 0$$

כאן השתמשנו ב־$g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$. בין 0 ל־1 הגרף מתחת לציר ובין 1 ל־2.7 מעליו, ולכן שני השטחים שווים:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_1^{2.7} f(x)\,dx = -S$$

השטח בין 0 ל־1 שווה ל־S.

השטח בין 2.7 ל־4.5 (הגרף מעל הציר):

$$\int_{2.7}^{4.5} f(x)\,dx = g(4.5) - g(2.7)$$
$$= 3S - 0 = 3S$$

השטח הכולל בין הגרף לציר ה־x בתחום $0 \le x \le 4.5$:

$$S + S + 3S = 5S$$

תשובה: $5S$

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 1

1. ענו על <u>שניים</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. **(1)** הוכיחו באינדוקצייה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

(2) חשבו את הערך של הסכום: $4^2+6^2+8^2+\ldots+100^2$.

ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ ($AB\parallel CD$).

הנקודה O היא מפגש אלכסוני הטרפז.

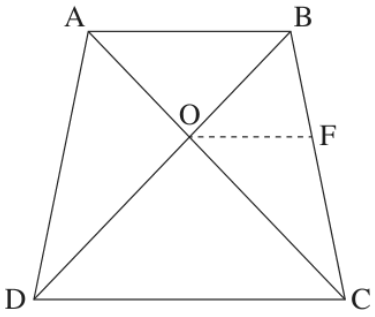
נתון: $\sphericalangle BAO=\sphericalangle CDO$.

(1) הוכיחו כי הטרפז $ABCD$ הוא שווה שוקיים.

הנקודה F נמצאת על הצלע BC כך שהקטע OF מקביל לבסיסי הטרפז.

נתון כי אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה, $DO=4$, $BO=3$.

(2) מצאו את אורך הקטע OF.



פתרון מלא

סעיף א (1)

נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי:

$$2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

שלב 1 – בדיקה עבור $n=1$:

אגף שמאל: $2^2=4$

אגף ימין: $\frac{2\cdot1\cdot3\cdot2}{3}=4$

האגפים שווים, ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב 2 – הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$:

$$2^2+4^2+\cdots+(2k)^2=\frac{2k(2k+1)(k+1)}{3}$$

שלב 3 – צעד: נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, כלומר:

$$2^2+\cdots+(2k)^2+(2k+2)^2=\frac{2(k+1)(2k+3)(k+2)}{3}$$

לפי ההנחה, סכום k המחוברים הראשונים שווה ל־$\frac{2k(2k+1)(k+1)}{3}$, ולכן אגף שמאל שווה ל:

$$\frac{2k(2k+1)(k+1)}{3}+4(k+1)^2$$

נוציא גורם משותף $\frac{2(k+1)}{3}$:

$$=\frac{2(k+1)}{3}\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]$$
$$=\frac{2(k+1)}{3}\left(2k^2+7k+6\right)$$
$$=\frac{2(k+1)(2k+3)(k+2)}{3}$$

קיבלנו את אגף ימין. לפי עקרון האינדוקציה המתמטית הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחה באינדוקציה: בדיקה עבור $n=1$, הנחה עבור $n=k$, צעד עבור $n=k+1$.

סעיף א (2)

הסכום $4^2+6^2+\cdots+100^2$ הוא הסכום מסעיף א (1) בלי המחובר הראשון 2^2.

המחובר האחרון הוא $100^2=(2\cdot 50)^2$, ולכן $n=50$:

$$2^2+4^2+\cdots+100^2=\frac{2\cdot 50\cdot 101\cdot 51}{3}$$
$$=171{,}700$$

נחסיר את $2^2=4$:

$$4^2+6^2+\cdots+100^2=171{,}700-4$$
$$=171{,}696$$

תשובה: $171{,}696$

סעיף ב (1)

טענה	נימוק
$\angle BAO=\angle OCD$	זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים ($AB\parallel CD$)
$\angle OCD=\angle ODC$	נתון $\angle BAO=\angle CDO$ ומעבר
$OC=OD$	במשולש מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ($\triangle OCD$)
$\angle ABO=\angle ODC$	זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים
$\angle ABO=\angle BAO$	מעבר, יחד עם השוויונות הקודמים
$OA=OB$	במשולש מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ($\triangle OAB$)
$AC=BD$	חיבור קטעים: $AO+OC=BO+OD$

$ABCD$ טרפז שווה שוקיים טרפז שאלכסוניו שווים הוא טרפז שווה שוקיים

תשובה: הוכחה: $OA=OB$ ו־$OC=OD$, לכן $AC=BD$ – טרפז שאלכסוניו שווים הוא שווה שוקיים.

סעיף ב (2)

מסעיף ב (1): $OC=OD=4$ ו־$OA=OB=3$.

האלכסונים מאונכים, ולכן המשולש ODC ישר זווית ושווה שוקיים. לפי משפט פיתגורס:

$$DC^2=4^2+4^2=32$$

$DC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

במשולש BCD: הקטע OF מקביל לצלע DC, ולכן לפי משפט תאלס המורחב ($\triangle BOF \sim \triangle BDC$):

$$\frac{OF}{DC} = \frac{BO}{BD} = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}$$

$$OF = \frac{3}{7} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

$$OF \approx 2.42$$

תשובה: $OF = \frac{12\sqrt{2}}{7} \approx 2.42$

סעיף ג (1)

נשתמש בקשר בין פונקציה לנגזרת שלה: במקום שבו לפונקציה יש משיק אופקי (קיצון או פיתול עם משיק אופקי), גרף הנגזרת שלה חותך או משיק לציר ה־x; במקום שבו הפונקציה עולה – הנגזרת חיובית, ובמקום שבו היא יורדת – הנגזרת שלילית.

- לגרף II יש נקודה אחת עם משיק אופקי משמאל (פיתול) ומקסימום אחד בצד החיובי. גרף III משיק לציר ה־x משמאל, חיובי עד נקודה בצד החיובי ושלילי אחריה – בדיוק סימני השיפוע של II. לכן II הוא f ו־III הוא f'.
- לגרף III יש שלוש נקודות קיצון (מינימום משמאל, מקסימום בצד השלילי, מינימום בצד החיובי). לגרף I יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה־x, והוא שלילי במקומות שבהם III יורד וחיובי במקומות שבהם III עולה. לכן I הוא f''.

בדיקה נוספת בנקודה $x = 0$: גרף III יורד שם, ואכן גרף I עובר שם בנקודה $(0, -2)$, מתחת לציר. גרף II עולה שם, ואכן גרף III עובר בנקודה $(0, 2)$, מעל לציר.

תשובה: גרף II – $f(x)$, גרף III – $f'(x)$, גרף I – $f''(x)$

סעיף ג (2)

נקודת פיתול של f היא נקודה שבה f'' מתאפסת ומחליפה סימן.

גרף f'' (גרף I) חותך את ציר ה־x שלוש פעמים, ובכל אחת מהן הוא עובר מצד לצד (מחליף סימן). לכן ל־f יש 3 נקודות פיתול.

אפשר לראות זאת גם מגרף f' (גרף III): לכל נקודת קיצון של f' מתאימה נקודת פיתול של f, ול־f' יש 3 נקודות קיצון.

תשובה: 3 נקודות פיתול

סעיף ג (3)

בתחום $0 \le x \le a$: גרף f' (III) נמצא מעל ציר ה־x (מתאפס רק ב־$x = a$, נקודת המקסימום של f), וגרף f'' (I) נמצא מתחת לציר ה־x. לכן גרף f' נמצא מעל גרף f'':

$$S = \int_0^a \left(f'(x) - f''(x)\right) dx$$

פונקציה קדומה של f' היא f, ופונקציה קדומה של f'' היא f':

$$S = \Big[f(x) - f'(x) \Big]_0^a$$

$$= \big(f(a) - f'(a)\big) - \big(f(0) - f'(0)\big)$$

נציב את הנתונים מהגרפים. בנקודת המקסימום של f:

$$f(a) = 5, \quad f'(a) = 0$$

מגרף II ומגרף III, בנקודה $x=0$:

$$f(0)=4,\ \ f'(0)=2$$
$$S=(5-0)-(4-2)=3$$

תשובה: $S=3$

סעיף ד (1)

נתון:

$$f(x)=\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$$

תחום ההגדרה – המכנה שונה מאפס:

$$x^2+2x=x(x+2)\neq 0$$
$$x\neq 0,\ \ x\neq -2$$

המכנה הוא ריבוע, ולכן הוא חיובי בכל תחום ההגדרה. לכן סימן f הוא סימן המונה:

$$2(x+1)>0\ \Rightarrow\ x>-1$$

מתוך $x>-1$ צריך להוציא את $x=0$, שאינו בתחום ההגדרה. לכן תחומי החיוביות:

$$-1<x<0\ \text{ או }\ x>0$$

תשובה: $-1<x<0$ **או** $x>0$

סעיף ד (2)

נסכם את סימן f ואת התנהגותה ליד הנקודות שבהן היא לא מוגדרת:

x	$f(x)$
$x<-2$	שלילית
ליד -2	$\to-\infty$ משני הצדדים
$-2<x<-1$	שלילית
-1	0
$-1<x<0$	חיובית
ליד 0	$\to+\infty$ משני הצדדים
$x>0$	חיובית

ליד $x=-2$ המונה קרוב ל־-2 והמכנה חיובי וקרוב ל־0, ולכן הפונקציה שואפת למינוס אינסוף. ליד $x=0$ המונה קרוב ל־2, ולכן הפונקציה שואפת לפלוס אינסוף.

- גרף I חיובי משמאל ל־$x=-2$ – לא מתאים.
- בגרף II הפונקציה שואפת למינוס אינסוף מימין ל־$x=0$ – לא מתאים.
- בגרף IV הפונקציה שואפת לפלוס אינסוף מימין ל־$x=-2$ – לא מתאים.

גרף III מקיים את כל התכונות, ולכן הוא מתאר את $f(x)$.

תשובה: גרף III

סעיף ד (3)

נשים לב שהמונה הוא הנגזרת של הביטוי שבתוך הריבוע:

$$(x^2+2x)'=2x+2=2(x+1)$$

לכן פונקציה קדומה של f היא:

$$F(x) = -\frac{1}{x^2+2x}$$

(בדיקה: $F'(x) = \frac{2x+2}{(x^2+2x)^2} = f(x)$.)

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x^2+2x}\right]_1^4$$
$$= -\frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{8}{24} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$$

תשובה: $\frac{7}{24}$

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 1

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון כי השוויון $8+24+48+\ldots+n(n+2)=\frac{n(n+a)(n+4)}{6}$ מתקיים בעבור $n=2$.

a הוא פרמטר.

(1) מצאו את הערך של a.

(2) בעבור הערך של a שמצאתם, הוכיחו באינדוקצייה או בכל דרך אחרת כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי זוגי.

ב. כל המועמדים ללימודים באוניברסיטה נבחנים בשני מבחנים.

נמצא כי מספר המועמדים שהצליחו רק במבחן הראשון קטן פי 4 ממספר המועמדים שהצליחו בשני המבחנים.

$\frac{8}{9}$ מן המועמדים שהצליחו במבחן השני, הצליחו גם במבחן הראשון.

נסמן ב־ p את ההסתברות לבחור באקראי מועמד שהצליח רק במבחן הראשון.

(1) הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי מועמד שהצליח לפחות במבחן אחד.

(2) ידוע שנבחר באקראי מועמד שהצליח לפחות במבחן אחד.

מהי ההסתברות שהמועמד שנבחר הצליח בשני המבחנים?

פתרון מלא

סעיף א (1)

עבור $n=2$ (המספר הזוגי הראשון) באגף שמאל יש מחובר אחד בלבד – 8.

באגף ימין נציב $n=2$:

$$\frac{2\cdot(2+a)\cdot(2+4)}{6}$$

$$=\frac{12(2+a)}{6}=2(2+a)$$

נשווה:

$$2(2+a)=8$$

$$2+a=4\ \Rightarrow\ a=2$$

תשובה: $a=2$

סעיף א (2)

עבור $a=2$ צריך להוכיח שלכל n טבעי זוגי:

$$8+24+48+\cdots+n(n+2)$$

$$=\frac{n(n+2)(n+4)}{6}$$

המחוברים הם:

$$2\cdot4,\ \ 4\cdot6,\ \ 6\cdot8,\ \ldots$$

כל מחובר הוא מכפלה של מספר זוגי במספר הזוגי שאחריו. לכן בכל צעד עוברים ממספר זוגי k למספר הזוגי הבא, $k+2$.

בדיקה עבור $n=2$: באגף שמאל 8, ובאגף ימין:

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6}{6}=8 \quad \checkmark$$

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k זוגי):

$$8+24+\cdots+k(k+2)$$
$$=\frac{k(k+2)(k+4)}{6}$$

צעד: נוכיח עבור $n=k+2$. המחובר הבא בסדרה הוא $(k+2)(k+4)$, וצריך להראות:

$$8+\cdots+k(k+2)+(k+2)(k+4)$$
$$=\frac{(k+2)(k+4)(k+6)}{6}$$

לפי ההנחה אגף שמאל שווה ל:

$$\frac{k(k+2)(k+4)}{6}+(k+2)(k+4)$$

נוציא גורם משותף $\frac{(k+2)(k+4)}{6}$:

$$=\frac{(k+2)(k+4)}{6}\cdot(k+6)$$

קיבלנו את אגף ימין, ולכן הטענה נכונה עבור $n=k+2$. לפי עקרון האינדוקציה השוויון נכון לכל n טבעי זוגי.

תשובה: הוכחה באינדוקציה על n זוגי: בדיקה עבור $n=2$, הנחה עבור $n=k$, וצעד עבור $n=k+2$.

סעיף ב (1)

נסמן ב־x את מספר המועמדים שהצליחו **בשני** המבחנים.

מספר המועמדים שהצליחו **רק** במבחן הראשון קטן פי 4:

$$\text{רק בראשון}=\frac{x}{4}$$

$\frac{8}{9}$ מהמצליחים במבחן השני הצליחו גם בראשון, כלומר x הוא $\frac{8}{9}$ ממספר המצליחים בשני:

$$\text{הצליחו בשני}=\frac{9}{8}x$$
$$\text{רק בשני}=\frac{9}{8}x-x=\frac{x}{8}$$

מספר המצליחים לפחות במבחן אחד:

$$\frac{x}{4}+x+\frac{x}{8}=\frac{11x}{8}$$

נסמן ב־N את מספר כל המועמדים. לפי הנתון:

$$p=\frac{x/4}{N}\ \Rightarrow\ \frac{x}{N}=4p$$

לכן ההסתברות להצליח לפחות במבחן אחד:

$$\frac{11x/8}{N}=\frac{11}{8}\cdot 4p=\frac{11}{2}p=5.5p$$

תשובה: $5.5p = \frac{11}{2}p$

סעיף ב (2)

נסמן: A – המועמד הצליח בשני המבחנים, B – המועמד הצליח לפחות במבחן אחד. ידוע ש־B התרחש, ולכן המבוקש הוא $P(A/B)$. לפי נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

מי שהצליח בשני המבחנים הצליח גם לפחות באחד, כלומר A מוכל ב־B, ולכן $P(A \cap B) = P(A)$.

מסעיף ב (1): $P(A) = \frac{x}{N} = 4p$ ו־$P(B) = 5.5p$. נציב:

$$P(A/B) = \frac{4p}{5.5p}$$

$$= \frac{8}{11} \approx 0.727$$

תשובה: $\frac{8}{11} \approx 0.727$

סעיף ג (1)

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$**:** הביטוי שבתוך השורש חייב להיות חיובי (הוא במכנה, ולכן לא יכול להיות 0):

$$x^2 - 1 > 0 \;\Rightarrow\; x < -1 \text{ או } x > 1$$

$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$**:** השורש במונה מחייב $x \geq 0$, והמכנה לא מתאפס: $x \neq \pm 1$. יחד:

$$x \geq 0, \quad x \neq 1$$

$h(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$**:** צריך $\frac{x}{x^2-1} \geq 0$, וגם $x \neq \pm 1$. טבלת סימנים:

תחום	x	x^2-1	המנה
$x < -1$	−	+	−
$-1 < x < 0$	−	−	+
$0 < x < 1$	+	−	−
$x > 1$	+	+	+

בנוסף, ב־$x = 0$ המנה שווה ל־0 (מותר). לכן:

$$-1 < x \leq 0 \text{ או } x > 1$$

תשובה: f**:** $x < -1$ **או** $x > 1$

g**:** $x \geq 0$**,** $x \neq 1$

h**:** $-1 < x \leq 0$ **או** $x > 1$

סעיף ג (2)

נתאים לפי תחומי ההגדרה מסעיף ג (1):

f**:** מוגדרת רק עבור $x < -1$ ועבור $x > 1$ – שני ענפים, בלי שום נקודה בין -1 ל־1. רק בגרף 3 אין נקודות בתחום $-1 \leq x \leq 1$. נבדוק גם: עבור $x < -1$ המונה שלילי, ולכן $f(x) < 0$, ועבור $x > 1$ מתקיים $f(x) > 0$ – כמו בגרף 3. לכן f – **גרף 3**.

g**:** מוגדרת רק עבור $x \geq 0$, ו־$g(0) = 0$. בתחום $0 < x < 1$ המכנה $x^2 - 1$ שלילי, ולכן $g(x) < 0$; עבור $x > 1$ מתקיים $g(x) > 0$. רק בגרף 1 הגרף מתחיל בראשית, יורד מתחת לציר ה־x עד האסימפטוטה $x = 1$, ומימינה חיובי. לכן g – **גרף 1**.

h: מוגדרת בתחום $-1 < x \leq 0$ ובתחום $x > 1$, ו־$h(x) \geq 0$ (שורש). רק בגרף 5 יש ענף בין -1 ל־0 ועוד ענף מימין ל־1, שניהם מעל ציר ה־x. לכן h – **גרף 5**.

תשובה: f – גרף 3

g – גרף 1

h – גרף 5

סעיף ד (1)

תחומי עלייה וירידה של f: f אי־זוגית, ולכן הגרף שלה סימטרי ביחס לראשית. לנקודת המינימום $(3,-6)$ מתאימה נקודת מקסימום $(-3,6)$. לפי הסרטוט:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x<-3$	+	עולה
$x=-3$	0	מקס׳
$-3<x<3$	–	יורדת
$x=3$	0	מינ׳
$x>3$	+	עולה

זוגיות: הנגזרת של פונקציה אי־זוגית היא פונקציה זוגית, ולכן הגרף של f' סימטרי ביחס לציר ה־y.

אסימפטוטה: לפי הנתון, ל־f' יש אסימפטוטה אופקית $y=0$.

לכן: f' מתאפסת ב־$x=-3$ וב־$x=3$, שלילית ביניהן (הערך הנמוך ביותר ב־$x=0$, שם f יורדת בתלילות הרבה ביותר), חיובית משמאל ל־-3 ומימין ל־3, ומתקרבת ל־0 כאשר $x \to \pm\infty$.

סקיצה של f': גרף זוגי, מתאפס ב־x=-3 וב־x=3, שלילי ביניהם עם מינימום ב־x=0, חיובי מחוץ להם ושואף ל־0

תשובה: f' זוגית; מתאפסת ב־$x=\pm 3$; שלילית בין -3 ל־3 וחיובית מחוץ לתחום זה; שואפת ל־0 כאשר $x \to \pm\infty$

סקיצה של f': גרף זוגי, מתאפס ב־x=-3 וב־x=3, שלילי ביניהם עם מינימום ב־x=0, חיובי מחוץ להם ושואף ל־0

סעיף ד (2)

נחפש מתי $g(x)=f^2(x)\cdot f'(x)=0$. מכפלה שווה ל־0 כאשר אחד הגורמים שווה ל־0:

$f(x)=0$: לפי הסרטוט הגרף של f חותך את ציר ה־x רק בראשית (מימין ל־0 הפונקציה שלילית: יורדת עד -6 ואחר כך עולה ומתקרבת ל־0 בלי להגיע אליו; ומשמאל ל־0, מהסימטריה, היא חיובית). לכן $x=0$.

$f'(x)=0$: בנקודות הקיצון, $x=-3$ ו־$x=3$.

נקודות החיתוך של g עם ציר ה־x:

$$(-3,0),\quad (0,0),\quad (3,0)$$

תשובה: $(-3,0),\ (0,0),\ (3,0)$

סעיף ד (3)

פונקציה קדומה: לפי כלל השרשרת, הנגזרת של $\frac{f^3(x)}{3}$ היא $f^2(x)\cdot f'(x)=g(x)$. לכן:

$$G(x)=\frac{f^3(x)}{3}$$

סימן g: $f^2(x)\geq 0$, ולכן הסימן של g הוא הסימן של f'. בין -3 ל־3 מתקיים $f'(x)<0$, כלומר $g(x)\leq 0$ – הגרף של g מתחת לציר ה־x. מחוץ לתחום הזה השטח בין g לציר אינו מוגבל (אין עוד נקודת

חיתוך), ולכן השטח המבוקש הוא בין $x=-3$ ל־$x=3$.
נשתמש בערכים $f(-3)=6$ ו־$f(3)=-6$:

$$\int_{-3}^{3} g(x)\,dx = \left[\frac{f^3(x)}{3}\right]_{-3}^{3}$$
$$= \frac{(-6)^3}{3} - \frac{6^3}{3}$$
$$= -72 - 72 = -144$$

האינטגרל שלילי כי השטח מתחת לציר ה־x, ולכן:

$$S = 144$$

תשובה: 144 יחידות שטח

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 1

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. **(1)** הוכיחו באינדוקצייה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

(2) האם הביטוי $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)$ שווה ל־ $\frac{n+1}{n}$ בעבור כל n טבעי? נמקו את תשובתכם.

ב. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

נסמן: $\sphericalangle ACB=\alpha$, $0^o<\alpha<90^o$.

(1) הביעו באמצעות α את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC,

ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש AOB.

נתון כי היחס שהבעתם בתת־סעיף (1) שווה ל־ $\sqrt{2}$,

וכי הצלע CB משיקה למעגל החוסם את משולש AOB.

(2) הוכיחו כי מרכז המעגל O נמצא על הצלע AC.

פתרון מלא

סעיף א (1)

נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

בדיקה עבור $n=1$: באגף שמאל ובאגף ימין:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}\qquad \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\quad\checkmark$$

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

צעד: נוכיח עבור $n=k+1$, כלומר צריך להראות:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

לפי ההנחה, סכום k המחוברים הראשונים הוא $\frac{k}{k+1}$, ולכן אגף שמאל שווה ל:

$$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

קיבלנו את אגף ימין, ולכן לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחה באינדוקציה: בדיקה, הנחה וצעד.

סעיף א (2)

מספיק למצוא ערך אחד של n שעבורו השוויון אינו מתקיים. נבדוק $n=2$. באגף שמאל:

$$1\cdot 2+2\cdot 3=2+6=8$$

ובאגף ימין:

$$\frac{n+1}{n}=\frac{3}{2}$$

התוצאות שונות, ולכן הטענה אינה נכונה לכל n טבעי.

(עבור $n=1$ השוויון דווקא מתקיים, אבל דוגמה נגדית אחת מספיקה כדי להפריך.)

תשובה: לא. דוגמה נגדית: עבור $n=2$ אגף שמאל הוא 8 ואגף ימין $\frac{3}{2}$.

סעיף ב (1)

נסמן ב־R את רדיוס המעגל O (החוסם את המשולש ABC). אז $OA=OB=R$.

במשולש ABC, לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{AB}{\sin\alpha}=2R\ \Rightarrow\ AB=2R\sin\alpha$$

הזווית $\angle AOB$ היא זווית מרכזית הנשענת על אותה קשת כמו הזווית ההיקפית $\angle ACB=\alpha$, ולכן:

$$\angle AOB=2\alpha$$

במשולש AOB נסמן ב־r את רדיוס המעגל החוסם אותו. לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{AB}{\sin 2\alpha}=2r$$
$$r=\frac{2R\sin\alpha}{2\sin 2\alpha}=\frac{R\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$r=\frac{R}{2\cos\alpha}$$
$$\frac{R}{r}=2\cos\alpha$$

תשובה: $2\cos\alpha$

סעיף ב (2)

נמצא את α מהנתון:

$$2\cos\alpha=\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ \alpha=45^\circ$$

טענה	נימוק
$\angle AOB=90^\circ$	זווית מרכזית שווה לפי 2 מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת ($2\cdot 45^\circ$)
AB קוטר במעגל החוסם את $\triangle AOB$	זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר
$CB\perp AB$	משיק מאונך לרדיוס (לקוטר) בנקודת ההשקה B
$\angle ABC=90^\circ$	מהטענה הקודמת
AC קוטר במעגל O	זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר
O נמצאת על AC	מרכז המעגל נמצא על כל קוטר

תשובה: הוכחה: $\alpha=45^\circ$, ולכן AC קוטר במעגל O ועובר דרך O.

סעיף ג (1)

שימוש באי־זוגיות: הגרף של פונקציה אי־זוגית סימטרי ביחס לראשית.

- יש מינימום ב־$x=-\frac{1}{2}$, ולכן יש מקסימום ב־$x=\frac{1}{2}$. אין נקודת קיצון נוספת (לכל קיצון היה „בן זוג" סימטרי).
- הפונקציה מתאפסת ב־$x=1$, ולכן היא מתאפסת גם ב־$x=-1$.
- פונקציה אי־זוגית רציפה עוברת בראשית.

נקודות החיתוך עם ציר ה־x:

$$x=-1,\quad x=0,\quad x=1$$

עלייה וירידה: יורדת עד המינימום ב־$-\frac{1}{2}$, עולה עד המקסימום ב־$\frac{1}{2}$, ויורדת אחריו.

סקיצה של f אי־זוגית: אפסים ב־-1, 0, 1, מינימום ב־-1/2 ומקסימום ב־1/2

תשובה: סקיצה:

סקיצה של f אי־זוגית: אפסים ב־-1, 0, 1, מינימום ב־-1/2 ומקסימום ב־1/2

סעיף ג (2)

נתון $g'(x)=-f(x)$. לכן g' מתאפסת בדיוק היכן ש־f מתאפסת:

$$x=-1,\quad x=0,\quad x=1$$

הסימן של g' הפוך לסימן של f:

x	$f(x)$	$g'(x)$	$g(x)$
$x<-1$	+	−	יורדת
$x=-1$	0	0	מינימום
$-1<x<0$	−	+	עולה
$x=0$	0	0	מקסימום
$0<x<1$	+	−	יורדת
$x=1$	0	0	מינימום
$x>1$	−	+	עולה

נתון $g(1)=2$, ו־g זוגית, ולכן גם $g(-1)=2$.

תשובה: $(1,2)$ **ו־**$(-1,2)$

סעיף ג (3)

טענה I: המקסימום של g הוא ב־$x=0$. בין 0 ל־1 הפונקציה g יורדת (סעיף ג (2)), ולכן:

$$g(0) > g(1) = 2$$

שיעור ה־y של נקודת המקסימום גדול מ־2 – הטענה **אינה נכונה**.

טענה II: משמאל ל־-1 הפונקציה יורדת אל המינימום $g(-1) = 2$, ומימין ל־1 היא עולה מהמינימום $g(1) = 2$. בין -1 ל־1 הערכים גדולים מ־2. לכן לכל x:

$$g(x) \geq 2 > 0$$

הטענה **נכונה**.

סקיצה של g זוגית עם מינימום (±1,2) ומקסימום ב־0

תשובה: I – לא נכונה; II – נכונה.

סעיף ד (1)

לפי הגרף ל־f יש **ארבע** נקודות חיתוך עם ציר ה־x: שתיים שליליות ושתיים חיוביות, והגרף חותך את ציר ה־y **מעל** ציר ה־x.

I: פולינום ממעלה 3 – יש לו לכל היותר 3 אפסים. לא מתאים.

II: מתאפס ב־$x=0$, אבל הגרף לא עובר בראשית. לא מתאים.

IV: האפסים:

$$x = 4,\ -1,\ -3,\ -6$$

שלושה שליליים ואחד חיובי. לא מתאים.

III: האפסים:

$$x = -6,\ -3,\ 1,\ 4$$

שניים שליליים ושניים חיוביים ✓. בדיקה בציר ה־y:

$$f(0) = (-4)(-1)(3)(6) = 72 > 0 \ \checkmark$$

תשובה: ביטוי III

סעיף ד (2)

הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ מוגדרת רק כאשר הביטוי שבתוך השורש אינו שלילי, כלומר:

$$f(x) \geq 0$$

לפי הגרף והאפסים מסעיף ד (1), f אינה שלילית משמאל ל־-6, בין -3 ל־1, ומימין ל־4:

$$x \leq -6$$
$$-3 \leq x \leq 1$$
$$x \geq 4$$

תשובה: $x \leq -6$
או $-3 \leq x \leq 1$
או $x \geq 4$

סעיף ד (3)

ל־$g = \sqrt{f}$ אותם אפסים כמו ל־f, והיא עולה ויורדת יחד עם f (השורש פונקציה עולה). לכן:

- משמאל ל־-6: g יורדת עד $(-6,0)$.
- בין -3 ל־1: „קשת" מ־$(-3,0)$ עד $(1,0)$, עם מקסימום מעל נקודת המקסימום של f.
- מימין ל־4: g עולה מ־$(4,0)$.

סקיצה של g=√f בשלושה חלקים

(בסקיצה: המקסימום של f הוא $f(-1)=100$, ולכן $g(-1)=10$.)

תשובה: סקיצה:

סקיצה של g=√f בשלושה חלקים

סעיף ד (4)

נפצל את האינטגרל לשני חלקים:

$$\int_5^8 \left[2g(x-1)+1\right]dx$$
$$= 2\int_5^8 g(x-1)\,dx + \int_5^8 1\,dx$$

הגרף של $g(x-1)$ הוא הגרף של $g(x)$ מוזז יחידה אחת ימינה, ולכן השטח מתחתיו בין 5 ל־8 שווה לשטח מתחת ל־g בין 4 ל־7:

$$\int_5^8 g(x-1)\,dx = \int_4^7 g(x)\,dx = k$$
$$\int_5^8 1\,dx = 8-5 = 3$$

לכן:

$$\int_5^8 \left[2g(x-1)+1\right]dx = 2k+3$$

תשובה: $2k+3$

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 1

1. ענו על <u>שניים</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקצייה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי:

$$4+13+\ldots+\frac{5n^2+3n}{2}=\frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$$

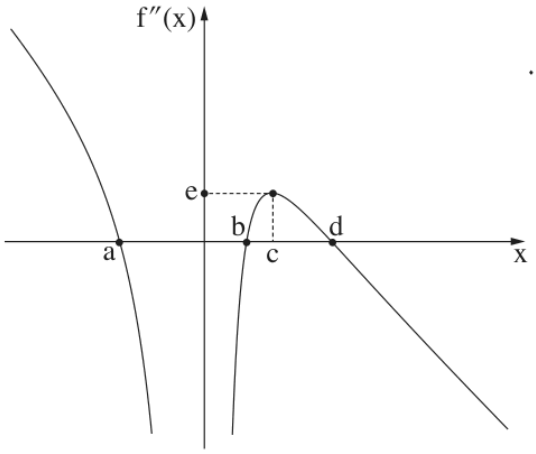
ב. נתונות הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־$f''(x)$, המוגדרות לכל $x\neq 0$.

בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

לגרף הפונקצייה $f''(x)$ יש שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה־x ,

ושיעוריהן הם $(a\,,0)$, $(b\,,0)$, $(d\,,0)$.

הנקודה $(c\,,e)$ היא נקודת הקיצון של הפונקצייה $f''(x)$.



(1) הביעו באמצעות e , d , c , b , a , אם יש צורך,

את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)$, המקיימת: $h'(x)=f''(x)-e$.

הפונקצייה $h(x)$ מוגדרת לכל $x\neq 0$.

(2) מצאו כמה נקודות קיצון וכמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $h(x)$ (אם יש כאלה).

נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א

נוכיח שלכל n טבעי:

$$4+13+\cdots+\frac{5n^2+3n}{2}=\frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$$

שלב 1 – בדיקה עבור $n=1$:

אגף שמאל: $\frac{5+3}{2}=4$

אגף ימין: $\frac{1\cdot 2\cdot 12}{6}=4$

האגפים שווים, ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב 2 – הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$:

$$4+13+\cdots+\frac{5k^2+3k}{2}=\frac{k(k+1)(5k+7)}{6}$$

שלב 3 – צעד: נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k+1$. האיבר ה־$(k+1)$ הוא:

$$\frac{5(k+1)^2+3(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(5k+8)}{2}$$

וצריך להוכיח שהסכום שווה ל:

$$\frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6}$$

לפי **ההנחה**, הסכום עד האיבר ה־k הוא $\frac{k(k+1)(5k+7)}{6}$, ולכן אגף שמאל שווה ל:

$$\frac{k(k+1)(5k+7)}{6} + \frac{(k+1)(5k+8)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)\left[k(5k+7)+3(5k+8)\right]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(5k^2+22k+24)}{6}$$

נפרק את הטרינום:

$$5k^2+22k+24 = (k+2)(5k+12)$$

ולכן:

$$= \frac{(k+1)(k+2)(5k+12)}{6}$$

קיבלנו את אגף ימין. לפי עקרון האינדוקצייה, השוויון נכון לכל n טבעי.

תשובה: הוכחה באינדוקצייה מתמטית: בדיקה, הנחה וצעד.

סעיף ב (1)

$f'(x)$ עולה כאשר הנגזרת שלה, $f''(x)$, חיובית, ויורדת כאשר $f''(x)$ שלילית. לפי הגרף של f'':

- $f''(x) > 0$ (הגרף מעל ציר ה־x): כאשר $x < a$, וכאשר $b < x < d$.
- $f''(x) < 0$ (הגרף מתחת לציר ה־x): כאשר $a < x < 0$, כאשר $0 < x < b$, וכאשר $x > d$.

תשובה: עלייה: $x < a$ **וגם** $b < x < d$
ירידה: $a < x < 0$, $0 < x < b$ **וגם** $x > d$

סעיף ב (2)

נקודות קיצון: $h'(x) = f''(x) - e$, כלומר הסימן של h' נקבע לפי המיקום של גרף f'' ביחס לישר $y = e$.

- **בענף השמאלי** ($x < 0$): f'' יורדת מערכים גדולים מאוד, ולכן היא חותכת את הישר $y = e$ בנקודה אחת, נסמן אותה x_0 (כאשר $x_0 < a$). משמאל ל־x_0: $f'' > e$, ולכן $h' > 0$; מימין ל־x_0: $f'' < e$, ולכן $h' < 0$. לכן ב־x_0 יש ל־h נקודת מקסימום.
- **בענף הימני** ($x > 0$): הערך הגדול ביותר של f'' הוא e (בנקודה $x = c$), ולכן $h'(x) \le 0$, ו־$h' = 0$ רק ב־$x = c$. הנגזרת אינה מחליפה סימן, ולכן ב־$x = c$ אין נקודת קיצון.

נקודות פיתול: $h''(x) = f'''(x)$. נקודת פיתול של h היא נקודה שבה h'' מחליפה סימן, כלומר נקודת קיצון של h' (ושל f'').

- בענף השמאלי f'' יורדת כל הזמן – אין שם נקודת פיתול.

- בענף הימני f'' עולה עד $x=c$ ואחר כך יורדת, ולכן ב־$x=c$ יש ל־h נקודת פיתול (עם משיק אופקי, כי $h'(c)=0$).

תשובה: ל־h נקודת קיצון אחת (מקסימום) ונקודת פיתול אחת.

סעיף ג (1)

הגרף של $f(x)+m$ הוא הגרף של f מוזז m יחידות למעלה. נקודת המינימום שלו:

$$(0,\ -3+m)$$

כיוון ש־$0<m<2$, מתקיים $-3+m<0$, כלומר המינימום נמצא מתחת לציר ה־x.

הערך המוחלט „משקף" את החלק שמתחת לציר ה־x אל מעליו, ולכן נקודת המינימום הופכת לנקודת מקסימום של g:

$$(0,\ |-3+m|)=(0,\ 3-m)$$

תשובה: נקודת המקסימום: $(0,3-m)$

סעיף ג (2)

נבנה את $|f(x)|$: החלק של הגרף שמתחת לציר ה־x (בין -5 ל־5) משתקף מעל הציר. לכן:

- $(0,-3)$ הופכת לנקודת מקסימום $(0,3)$.
- $(-5,0)$ ו־$(5,0)$ הופכות לנקודות מינימום (הגרף נוגע בציר ויוצא ממנו כלפי מעלה).

$h(x)=|f(x)|+m$ היא הזזה של m יחידות למעלה:

מקסימום: $(0,\ 3+m)$

מינימום: $(-5,\ m),\ (5,\ m)$

תשובה: מקסימום $(0,3+m)$; מינימום $(-5,m)$ ו־$(5,m)$

סעיף ג (3)

טענה I: $h(x)=|f(x)|+m\geq m>0$, ולכן h חיובית לכל x. לעומת זאת $g(x)=|f(x)+m|$ מתאפסת כאשר $f(x)=-m$. כיוון ש־$-3<-m<0$, למשוואה הזו יש שני פתרונות (הישר $y=-m$ חותך את גרף f פעמיים). לכן g אינה חיובית לכל x. **טענה I אינה נכונה.**

טענה II: נבדוק את הפונקצייה h. ערך המינימום שלה m וערך המקסימום המקומי $3+m$, ומתקיים:

$$m<m+\tfrac{1}{2}<3+m$$

לכן הישר $y=m+\frac{1}{2}$ חותך את גרף h בארבע נקודות (שתיים ליד כל נקודת מינימום), ולא בשלוש. **טענה II אינה נכונה.**

(גם עבור g: שלוש נקודות חיתוך מתקבלות רק אם הישר עובר דרך המקסימום, כלומר $m+\frac{1}{2}=3-m$, $m=1.25$, ולא לכל m.)

תשובה: טענה I אינה נכונה; טענה II אינה נכונה.

סעיף ד (1)

טענה	נימוק
$\angle ACD=90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר (AD) היא ישרה
$\angle AFB=90^\circ$	נתון: $FB\perp FA$
$\angle ACD=\angle AFB$	שתיהן זוויות ישרות

$\angle ABF + \angle ABC = 180^\circ$ זוויות צמודות (F על המשך CB)

$\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות 180°

$\angle ABF = \angle ADC$ מהשוויונות הקודמים

$\triangle ACD \sim \triangle AFB$ ז.ז.

תשובה: הוכחה: $\angle ACD = \angle AFB = 90^\circ$ **ו־**$\angle ADC = \angle ABF$**, ולכן הדמיון לפי ז.ז.**

סעיף ד (2)

לפי הדמיון בסעיף הקודם, הצלע AD (מול הזווית הישרה C) מתאימה לצלע AB (מול הזווית הישרה F). יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle AFB}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$$

במשולש ABD: $\angle ABD = 90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על הקוטר AD). לכן:

$$\sin\angle BDA = \frac{AB}{AD}$$

$$\frac{AB}{AD} = \sin 24^\circ$$

ולכן:

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle AFB}} = \frac{1}{\sin^2 24^\circ} \approx 6.045$$

תשובה: היחס $\frac{1}{\sin^2 24^\circ} \approx 6.045$

בגרות חורף תשפ"ד (2024) • שאלה 1

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

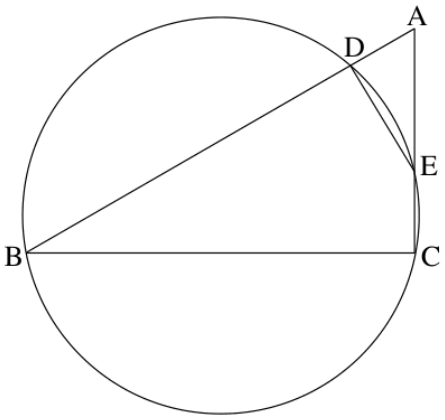
א. הוכיחו באינדוקצייה או בדרך אחרת שלכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$48 + 144 + 288 + ... + 6n(n+2) = n(n+2)(n+4)$$

ב. המרובע BCED חסום במעגל.

המשך המיתר BD והמשך המיתר CE נפגשים בנקודה A (ראו סרטוט).

נתון: $AE = 2CE$, $AD = CE$.



(1) הוכיחו: $\triangle AED \sim \triangle ABC$.

(2) מצאו את היחס $\frac{AB}{AC}$.

(3) נתון: $\sphericalangle DEC = 150^o$.

האם BE הוא קוטר במעגל הנתון? נמקו את תשובתכם.

ג. לפניכם סרטוט של גרף הפונקצייה $f(x)$.

לפונקצייה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה־ x ושתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה־ y .

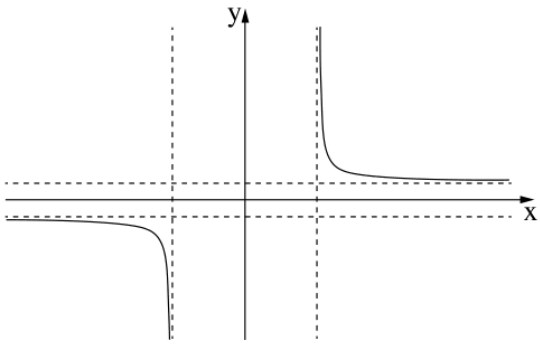
אחד מן הביטויים I–IV שלפניכם מתאר את הפונקצייה $f(x)$.

I. $\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$

II. $\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$

III. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}$

IV. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}$



(1) קבעו איזה מן הביטויים I–IV מתאר את הפונקצייה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקצייה $g(x)$, המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת: $g'(x) = f(x) + \frac{5}{3}$.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $g(x)$.

פתרון מלא

סעיף א

האיבר הכללי $6n(n+2)$ מופיע רק עבור n זוגי: $n=2$ נותן 48, $n=4$ נותן 144, $n=6$ נותן 288. לכן ההוכחה באינדוקציה היא בקפיצות של 2.

בדיקה עבור $n=2$:

2 אגף ימין: $\cdot 4 \cdot 6 = 48$ ✓

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$ זוגי:

$$48 + \cdots + 6k(k+2)$$
$$= k(k+2)(k+4)$$

צעד: נוכיח עבור המספר הזוגי הבא, $n = k + 2$:

$$48 + \cdots + 6k(k+2)$$
$$+6(k+2)(k+4)$$
$$= (k+2)(k+4)(k+6)$$

לפי ההנחה, אגף שמאל שווה ל־

$$k(k+2)(k+4) + 6(k+2)(k+4)$$
$$= (k+2)(k+4)(k+6)$$

הוצאנו גורם משותף $(k+2)(k+4)$. זה בדיוק אגף ימין, ולכן הטענה נכונה לכל n טבעי זוגי.

תשובה: הוכחה באינדוקציה: בדיקה ל־$n = 2$, וצעד מ־k ל־$k + 2$ בעזרת גורם משותף $(k+2)(k+4)$.

סעיף ב (1)

טענה	נימוק
$\angle A = \angle A$	זווית משותפת
$\angle AED = \angle DBC$	במרובע חסום, זווית חיצונית שווה לזווית הפנימית שמול הזווית הסמוכה לה
$\triangle AED \sim \triangle ABC$	ז.ז.

תשובה: הוכחה: זווית משותפת A ו־$\angle AED = \angle ABC$ (זווית חיצונית למרובע חסום), לכן $\triangle AED \sim \triangle ABC$ לפי ז.ז.

סעיף ב (2)

נסמן $CE = x$. אז:

$$AD = x, \quad AE = 2x$$
$$AC = AE + EC = 3x$$

מהדמיון $\triangle AED \sim \triangle ABC$:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$$
$$\frac{2x}{AB} = \frac{x}{3x} \;\Rightarrow\; AB = 6x$$
$$\frac{AB}{AC} = \frac{6x}{3x} = 2$$

תשובה: $\frac{AB}{AC} = 2$

סעיף ב (3)

במרובע החסום $BCED$ סכום זוויות נגדיות הוא 180°:

$$\angle DBC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

במשולש ABC: $AB = 6x$, $AC = 3x$, $\angle B = 30^\circ$. לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$$
$$\frac{3x}{\sin 30^\circ}=\frac{6x}{\sin C}$$
$$\sin C=\frac{6x\cdot\frac{1}{2}}{3x}=1\ \Rightarrow\ \angle ACB=90^\circ$$

כלומר $\angle BCE=90^\circ$. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר, ולכן BE הוא קוטר.

תשובה: כן: $\angle BCE=90^\circ$, וזווית היקפית ישרה נשענת על קוטר

סעיף ג (1)

לפי הגרף: יש שתי אסימפטוטות אנכיות – הפונקציה לא מוגדרת סביב $x=0$, ושתי אסימפטוטות אופקיות שונות.

- בביטויים I ו־III המכנה $\sqrt{x^2+16}$ מוגדר וחיובי לכל x, ולכן אין להם אסימפטוטות אנכיות. נפסלים.
- בביטוי IV: כש־$x\to\pm\infty$, $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}\approx\frac{x^2}{|x|}=|x|\to\infty$ – אין אסימפטוטה אופקית. נפסל.
- בביטוי II: תחום $x<-4$ או $x>4$, אסימפטוטות אנכיות $x=\pm4$, ו־

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}\approx\frac{x}{|x|}\to\pm1$$

כלומר $y=1$ מימין ו־$y=-1$ משמאל – בדיוק כמו בגרף.

תשובה: ביטוי II: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$

סעיף ג (2)

$g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}+\frac{5}{3}$, בתחום $x<-4$ או $x>4$.

עבור $x>4$: $f(x)>0$, ולכן $g'(x)>0$ – g עולה.

עבור $x<-4$: נמצא היכן $g'(x)=0$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}=-\frac{5}{3}$$

אגף שמאל שלילי כאן, נעלה בריבוע:

$$\frac{x^2}{x^2-16}=\frac{25}{9}$$
$$9x^2=25x^2-400\ \Rightarrow\ x^2=25$$
$$x=-5$$

הפתרון $x=5$ נפסל, כי עבורו $f>0$ – לפי הגרף, בתחום $x<-4$ הפונקציה f יורדת מ־-1 אל $-\infty$, ולכן:.

x	$g'(x)$	$g(x)$
$x<-5$	+	עולה
$x=-5$	0	
$-5<x<-4$	–	יורדת
$x>4$	+	עולה

בדיקה:

$g'(-6) = -\frac{6}{\sqrt{20}} + \frac{5}{3} \approx 0.32 > 0$

$g'(-4.5) \approx -2.18 + 1.67 < 0$

תשובה: עולה: $x < -5$**,** $x > 4$

יורדת: $-5 < x < -4$

סעיף ד (1)

בנקודות הקיצון של f הנגזרת מתאפסת. לגרף II יש נקודות קיצון A, B, C, ובדיוק בשיעורי ה־x שלהן גרף I חותך את ציר x.

בנוסף: היכן ש־II עולה – משמאל ל־A, בין B ל־C – גרף I חיובי, והיכן ש־II יורד גרף I שלילי. לכן I הוא גרף הנגזרת, ו־II הוא גרף הפונקציה.

תשובה: גרף II מתאר את $f(x)$**; גרף I הוא** $f'(x)$

סעיף ד (2)

בנקודת פיתול של f הנגזרת f' משנה כיוון – כלומר יש ל־f' (גרף I) נקודת קיצון.

לגרף I יש שלוש נקודות קיצון: מינימום ליד ציר y, מקסימום בין B ל־C, ומינימום מימין ל־C. לכן ל־f יש 3 נקודות פיתול.

תשובה: 3 נקודות פיתול

סעיף ד (3)

השטח המקווקו מורכב משני חלקים: בין x_A ל־x_B גרף I מתחת לציר, ובין x_B ל־x_C מעליו. f היא פונקציה קדומה של f':

$$S_1 = -\int_{x_A}^{x_B} f'(x)\,dx$$

$$= f(x_A) - f(x_B)$$

$$= 6 - 2 = 4$$

$$S_2 = \int_{x_B}^{x_C} f'(x)\,dx$$

$$= f(x_C) - f(x_B)$$

$$= y_C - 2$$

נתון שהשטח הכולל 7:

$$4 + y_C - 2 = 7 \;\Rightarrow\; y_C = 5$$

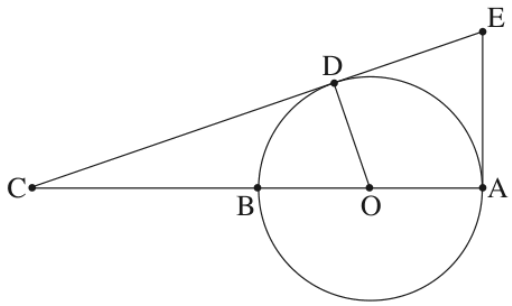
תשובה: $y_C = 5$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 1

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בעבור כל n טבעי הוכיחו באינדוקצייה או בדרך אחרת כי מתקיים: $\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+...+\frac{A}{2^n}=A\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.
A הוא פרמטר.

ב. הנקודה B היא אמצע הקטע AC.
AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.
מן הנקודה C מעבירים ישר המשיק למעגל בנקודה D.
בנקודה A מעבירים משיק נוסף למעגל.
שני המשיקים נחתכים בנקודה E (ראו סרטוט).



(1) הוכיחו כי המרובע $AODE$ הוא בר חסימה במעגל.

(2) הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המרובע $AODE$.

פתרון מלא

סעיף א

נוכיח באינדוקציה ש:

$$\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+\cdots+\frac{A}{2^n}=A\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

שלב 1 – בדיקה עבור $n=1$:

אגף שמאל: $\frac{A}{2}$

אגף ימין: $A\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{A}{2}$

הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב 2 – הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$:

$$\frac{A}{2}+\cdots+\frac{A}{2^k}=A\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$$

שלב 3 – צעד: נוכיח עבור $n=k+1$, כלומר:

$$\frac{A}{2}+\cdots+\frac{A}{2^k}+\frac{A}{2^{k+1}}$$
$$=A\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

לפי ההנחה, סכום k המחוברים הראשונים שווה ל:

$$A\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$$

לכן אגף שמאל:

$$A\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+\frac{A}{2^{k+1}}$$
$$=A\left(1-\frac{2}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$
$$=A\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

קיבלנו את אגף ימין, ולכן לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחה באינדוקציה: בדיקה, הנחה וצעד.

סעיף ב (1)

טענה	נימוק
$\angle OAE=90^\circ$	רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
$\angle ODE=90^\circ$	רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
$\angle OAE+\angle ODE=180^\circ$	חיבור הזוויות
$AODE$ בר חסימה במעגל	מרובע שבו סכום זוג זוויות נגדיות הוא 180° הוא בר חסימה במעגל

תשובה: הוכחה: $\angle OAE+\angle ODE=180^\circ$, ולכן המרובע בר חסימה.

סעיף ב (2)

אורכים על הישר CA: B אמצע AC, ולכן $BC=AB=2R$:

$$CO=CB+BO=2R+R=3R$$
$$CA=4R$$

במשולש CDO הזווית D ישרה, כי רדיוס מאונך למשיק. לפי משפט פיתגורס:

$$CD=\sqrt{CO^2-OD^2}=\sqrt{9R^2-R^2}$$
$$CD=2\sqrt{2}R$$

דמיון משולשים: במשולשים CDO ו־CAE הזווית C משותפת, ושתי הזוויות D ו־A ישרות (רדיוס מאונך למשיק). לכן המשולשים דומים לפי ז.ז.:

$$\triangle CDO\sim\triangle CAE$$
$$\frac{AE}{DO}=\frac{CA}{CD}$$
$$\frac{AE}{R}=\frac{4R}{2\sqrt{2}R}=\sqrt{2}$$
$$AE=\sqrt{2}R$$

המעגל החוסם את $AODE$: הזווית OAE ישרה, והיא זווית היקפית במעגל זה. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר, ולכן OE הוא קוטר המעגל.

במשולש OAE לפי משפט פיתגורס:

$$OE=\sqrt{OA^2+AE^2}=\sqrt{R^2+2R^2}$$
$$OE=\sqrt{3}R$$

רדיוס המעגל החוסם הוא מחצית הקוטר:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}R \approx 0.866R$$

תשובה: $r = \frac{\sqrt{3}}{2}R$

סעיף ג (1)

נבדוק לכל פונקציה את תחום ההגדרה ואת הסימן.

הפונקציה f:

$$f(x) = \sqrt{x^2(x+2)}$$

מוגדרת כאשר $x^2(x+2) \geq 0$, כלומר עבור $x \geq -2$. שורש ריבועי אינו שלילי, ולכן הגרף כולו מעל ציר ה־x ונוגע בו ב־$x = -2$ וב־$x = 0$. זהו **גרף ד**.

הפונקציה h:

$$h(x) = \sqrt{x(x+2)}$$

מוגדרת כאשר $x(x+2) \geq 0$:

$$x \geq 0 \quad \text{או} \quad x \leq -2$$

בין -2 ל־0 אין גרף. זהו **גרף ג**.

הפונקציה k:

$$k(x) = x\sqrt{x+2}$$

מוגדרת עבור $x \geq -2$. בתחום $-2 < x < 0$ הגורם x שלילי, ולכן הגרף מתחת לציר, ועבור $x > 0$ הוא מעל הציר. זהו **גרף א**.

תשובה: $f(x)$ – גרף ד

$h(x)$ – גרף ג

$k(x)$ – גרף א

סעיף ג (2)

הגרף הנותר הוא גרף ב. מתכונותיו:

- מוגדר עבור $x \geq -2$.
- בתחום $-2 < x < 0$ הוא מתחת לציר, ועבור $x > 0$ מעל הציר.
- בנקודה $x = 0$ הוא משיק לציר וגם חוצה אותו.

בפונקציה $g(x) = x^n\sqrt{x+2}$ הגורם $\sqrt{x+2}$ חיובי עבור $x > -2$, ולכן הסימן של g הוא הסימן של x^n.

כאשר n זוגי, תמיד $x^n \geq 0$, והגרף כולו מעל הציר. זה לא מתאים לגרף ב.

כאשר n אי־זוגי, x^n שלילי עבור $x < 0$ וחיובי עבור $x > 0$. זה מתאים לגרף ב. מכיוון ש־$n > 1$, הגרף גם משיק לציר ב־$x = 0$.

לכן n אי־זוגי ו־$n \geq 3$.

תשובה: n אי־זוגי, $n \geq 3$.

סעיף ד (1)

נקרא מהגרף של $f(x)$:

- בתחום $x < 0$ הפונקציה עולה, ולכן $f'(x) > 0$. בתחום $x > 0$ היא יורדת, ולכן $f'(x) < 0$.
- הפונקציה קעורה כלפי מעלה, ולכן $f'(x)$ עולה בכל אחד מן התחומים.

- באינסוף הגרף מתקרב לאסימפטוטה $y=2$ ונעשה שטוח, ולכן $f'(x)\to 0$. הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה של f'.
- ליד $x=0$ הגרף תלול מאוד: משמאל $f'(x)\to+\infty$, ומימין $f'(x)\to-\infty$. הישר $x=0$ הוא אסימפטוטה של f'.

סקיצה של f': ענף שמאלי חיובי ועולה, ענף ימני שלילי ועולה, אסימפטוטות x=0 ו-y=0

תשובה: ענף שמאלי: חיובי ועולה.
ענף ימני: שלילי ועולה.
אסימפטוטות: $x=0$, $y=0$.

סעיף ד (2)

$f(x)$ קעורה כלפי מעלה בכל תחום הגדרתה, ולכן פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.

עלייה: $x<0$ וגם $x>0$. אין תחומי ירידה.

תשובה: עלייה: $x<0$ וגם $x>0$.
ירידה: אין.

סעיף ד (3)

נתון $a>0$, ולכן כל הביטויים מתייחסים לתחום $x>0$. שם f יורדת ו־$f(x)>2$, כי הגרף מעל האסימפטוטה $y=2$.

ביטוי (3):

$$\int_a^{a+1} f'(x)\,dx = f(a+1)-f(a) < 0$$

שלילי, כי f יורדת ו־$a+1>a$.

ביטויים (1) ו־(2): אינטגרל על קטע שאורכו 1 של פונקציה שגדולה מ־2 גדול מ־$2\cdot 1=2$:

$$\int_a^{a+1} f(x)\,dx > 2$$

$$\int_{a+1}^{a+2} f(x)\,dx > 2$$

f יורדת, ולכן ערכיה בקטע $[a,a+1]$ גדולים מערכיה בקטע $[a+1,a+2]$. כלומר, (1) גדול מ־(2).

הסדר מהקטן לגדול:

$$(3)<(4)<(2)<(1)$$

תשובה: $(3)<(4)<(2)<(1)$

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד מיוחד • שאלה 1

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

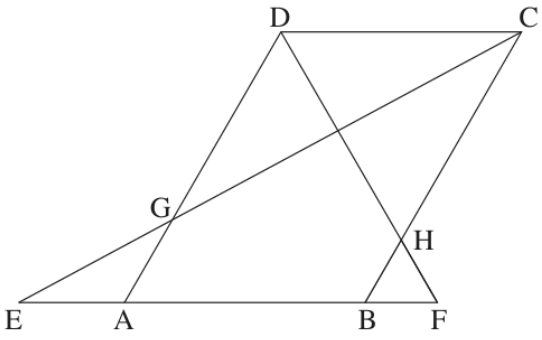
א. בסרטוט שלפניכם מקבילית $ABCD$.

הנקודות E ו־F נמצאות על המשכי הצלע AB, כמתואר בסרטוט.

הקטע EC חותך את הצלע AD בנקודה G.

הקטע FD חותך את הצלע BC בנקודה H.

נתון: $HF = 4$, $GE = 5$.



(1) מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש HBF ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש GEA.

נמקו את תשובתכם.

נתון: המרובע $ABHD$ הוא בר־חסימה במעגל, $BH = FH$.

(2) הוכיחו כי המשולש HBF הוא שווה צלעות.

ב. ביישוב מסוים ההסתברות לבחור באקראי גבר היא 0.2, וההסתברות לבחור באקראי אישה היא 0.8.

בוחרים באקראי 4 אנשים מיישוב זה.

לפניכם שני ביטויים:

ביטוי 1: $1-0.2^4-0.8^4$

ביטוי 2: $\binom{4}{3}\cdot 0.2^3\cdot 0.8+0.2^4$

קבעו איזו מן ההסתברויות I–III שלפניכם אפשר לחשב על ידי ביטוי 1 ואיזו מהן אפשר לחשב על ידי ביטוי 2.

I. ההסתברות לבחור באקראי יותר גברים מנשים.

II. ההסתברות לבחור באקראי יותר נשים מגברים.

III. ההסתברות לבחור באקראי לפחות גבר אחד ולפחות אישה אחת.

פתרון מלא

סעיף א (1)

נסמן $\angle HBF = \alpha$.

במקבילית $AD \parallel BC$, ולכן $\angle DAB = \angle CBF = \alpha$ (זוויות מתאימות), והזווית הצמודה לה היא:

$$\angle GAE = 180^\circ - \alpha$$

נשתמש במשפט הסינוסים בכל אחד מהמשולשים.

במשולש HBF:

$$\frac{HF}{\sin\alpha} = 2R_1 \;\Rightarrow\; R_1 = \frac{4}{2\sin\alpha}$$

במשולש GEA:

$$\frac{GE}{\sin(180^\circ-\alpha)}=2R_2$$

מכיוון ש־$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$:

$$R_2=\frac{5}{2\sin\alpha}$$

היחס בין הרדיוסים:

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{4}{5}$$

תשובה: $R_{HBF}:R_{GEA}=4:5$

סעיף א (2)

טענה	נימוק
$\angle DHB=180^\circ-\angle DAB$	במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות הוא 180°
$\angle BHF=\angle DAB$	זוויות צמודות משלימות ל־180°
$\angle HBF=\angle DAB$	זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים ($AD\parallel BC$)
$\angle BHF=\angle HBF$	כלל המעבר
$HF=BF$	במשולש מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות
$BH=FH$	נתון
$HF=BH=BF$	כלל המעבר
$\triangle HBF$ שווה צלעות	משולש ששלוש צלעותיו שוות

תשובה: הזוויות $\angle BHF$ ו־$\angle HBF$ שוות שתיהן ל־$\angle DAB$, ולכן $HF=BF$; יחד עם הנתון $BH=FH$ המשולש שווה צלעות.

סעיף ב

נסמן: כל אדם שנבחר הוא גבר בהסתברות 0.2 ואישה בהסתברות 0.8, באופן בלתי תלוי.

ביטוי 1: 0.2^4 היא ההסתברות שכל ארבעת הנבחרים גברים, ו־0.8^4 – שכולם נשים. לכן:

$$1-0.2^4-0.8^4$$

היא ההסתברות שלא כולם גברים ולא כולן נשים, כלומר שנבחרו לפחות גבר אחד ולפחות אישה אחת – הסתברות III.

ביטוי 2: לפי נוסחת ברנולי עם $p=0.2$ (גבר):

$$P_4(3)=\binom{4}{3}\cdot 0.2^3\cdot 0.8$$

$$P_4(4)=0.2^4$$

הסכום הוא ההסתברות לבחור 3 או 4 גברים, כלומר יותר גברים מנשים – הסתברות I.

תשובה: ביטוי 1 – הסתברות III; ביטוי 2 – הסתברות I.

סעיף ג (1)

בכל נקודת קיצון של $f'(x)$ מתקיים $f''(x)=0$, כלומר גרף f'' חותך שם את ציר ה־x.

- לגרף I יש נקודות קיצון ב־$x=-0.6$, ב־$x=0.4$ וב־$x=1$.
- בדיוק בשלוש הנקודות האלה גרף II חותך את ציר ה־x.

נבדוק גם את הסימנים: בתחומים שבהם גרף I יורד, גרף II שלילי; בתחומים שבהם גרף I עולה, גרף II חיובי.
לכן גרף I הוא של $f'(x)$ וגרף II הוא של $f''(x)$.

תשובה: גרף I – $f'(x)$, גרף II – $f''(x)$

סעיף ג (2)

S_1 – השטח ברביע הראשון, בתחום $0 \le x \le 0.4$. שם גרף II מעל ציר ה־x.

S_2 – השטח ברביע הרביעי, בתחום $0.4 \le x \le 1$. שם גרף II מתחת לציר ה־x.

גרף II הוא f'', ופונקציה קדומה שלו היא f':

$$S_1 = \int_0^{0.4} f''(x)\,dx = f'(0.4) - f'(0)$$

$$S_2 = \int_{0.4}^{1} (0 - f''(x))\,dx$$

$$= f'(0.4) - f'(1)$$

גרף I הוא f'. הוא עובר בראשית, ולכן $f'(0) = 0$. הוא נוגע בציר ה־x ב־$x = 1$, ולכן $f'(1) = 0$. מכאן:

$$S_1 = f'(0.4) = S_2$$

תשובה: הוכחה: שני השטחים שווים ל־$f'(0.4)$, כי $f'(0) = f'(1) = 0$.

סעיף ד (1)

זוויות הראש הן סדרה הנדסית אין־סופית: האיבר הראשון α והמנה $q = \frac{1}{2}$ (כל זווית קטנה פי 2 מקודמתה).

המנה בין -1 ל־1, ולכן הסדרה מתכנסת, וסכומה:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{2}} = 2\alpha$$

נתון שהסכום הוא 240°:

$$2\alpha = 240^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 120^\circ$$

תשובה: $\alpha = 120^\circ$

סעיף ד (2)

כל משולש הוא שווה שוקיים ששוקיו רדיוסים R. אם זווית הראש של המשולש ה־n היא α_n, שטחו:

$$T_n = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha_n$$

זוויות הראש: $120^\circ,\ 60^\circ,\ 30^\circ,\ 15^\circ, \ldots$

נבדוק את המנה בין שטחים עוקבים:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 120^\circ} = 1$$

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

המנות שונות, ולכן שטחי המשולשים אינם סדרה הנדסית.

באופן כללי, כי $\alpha_n = 2\alpha_{n+1}$:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{\sin \alpha_{n+1}}{\sin 2\alpha_{n+1}} = \frac{1}{2\cos \alpha_{n+1}}$$

וזה תלוי ב־n.

תשובה: לא. $\frac{T_2}{T_1}=1$ **אבל** $\frac{T_3}{T_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ **– המנה אינה קבועה.**

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 1

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתונות שתי סדרות המוגדרות לכל n טבעי: $a_n = 2n-1$, $b_n = 2^n$.

נסמן: $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$

(1) הוכיחו כי:

אם בעבור k טבעי כלשהו מתקיים: $T_k = (2k-3)\cdot 2^{k+1}$

אז מתקיים: $T_{k+1} = (2k-1)\cdot 2^{k+2}$

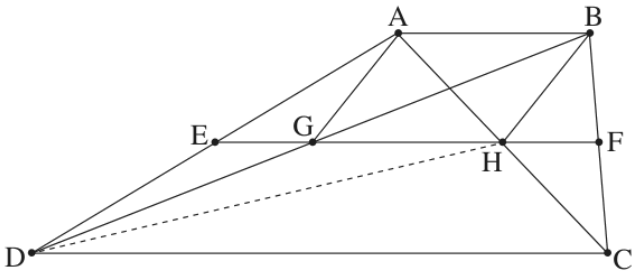
לפניכם טענה: לכל n טבעי מתקיים: $T_n = (2n-3)\cdot 2^{n+1}$.

(2) הסבירו מדוע טענה זו אינה נכונה.

ב. בטרפז $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ הקטע EF הוא קטע אמצעים.

הקטע EF חותך את האלכסונים AC ו־BD של הטרפז בנקודות G ו־H בהתאמה.

נתון כי המרובע $ABHG$ הוא מקבילית.



(1) הוכיחו: $GH = 2EG$.

המשך הישר AG חותך את הקטע DH בנקודה M .

(2) הוכיחו: הקטע AM חוצה את הקטע DH .

פתרון מלא

סעיף א (1)

הסכום T_{k+1} מתקבל מ־T_k על ידי הוספת המחובר הבא, $a_{k+1}b_{k+1}$:

$$a_{k+1} = 2(k+1)-1 = 2k+1$$
$$b_{k+1} = 2^{k+1}$$

נשתמש בנתון $T_k = (2k-3)\cdot 2^{k+1}$:

$$T_{k+1} = T_k + a_{k+1}b_{k+1}$$
$$= (2k-3)\cdot 2^{k+1} + (2k+1)\cdot 2^{k+1}$$

נוציא גורם משותף 2^{k+1}:

$$= 2^{k+1}\big(2k-3+2k+1\big)$$
$$= 2^{k+1}(4k-2)$$
$$= 2^{k+1}\cdot 2(2k-1) = (2k-1)\cdot 2^{k+2}$$

זה מה שהיה צריך להוכיח.

תשובה: הוכחה: $T_{k+1} = (2k-1)\cdot 2^{k+2}$

סעיף א (2)

בסעיף א (1) הוכחנו רק את **הצעד** של האינדוקציה: אם הטענה נכונה עבור k, היא נכונה גם עבור $k+1$. כדי שהטענה תהיה נכונה לכל n, היא צריכה להתקיים גם עבור $n=1$ (בסיס האינדוקציה).

נבדוק עבור $n=1$:

$$T_1 = a_1 b_1 = 1 \cdot 2 = 2$$

לפי הנוסחה בטענה:

$$(2 \cdot 1 - 3) \cdot 2^{1+1} = -1 \cdot 4 = -4$$

$2 \neq -4$, ולכן הטענה אינה נכונה כבר עבור $n=1$. הצעד לבדו אינו מספיק – חסר בסיס.

הערה: כיוון שהבדיקה עבור $n=1$ נכשלת, הנוסחה אינה נכונה לאף n – למשל $T_2 = 2 + 3 \cdot 4 = 14$, ואילו לפי הנוסחה $8 \cdot 1 = 8$. הנוסחה הנכונה היא $T_n = (2n-3) \cdot 2^{n+1} + 6$.

תשובה: הטענה אינה נכונה כבר עבור $n=1$:
$T_1 = 2$, ואילו לפי הנוסחה מתקבל -4.

סעיף ב (1)

טענה	נימוק
E אמצע AD ו־$EF \parallel AB$	EF קטע אמצעים בטרפז: מחבר את אמצעי השוקיים ומקביל לבסיסים
G אמצע BD	במשולש ABD: ישר היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לצלע שנייה חוצה את הצלע השלישית
$EG = \frac{1}{2}AB$	EG קטע אמצעים במשולש ABD שווה למחצית הצלע שמקבילה לו
$GH = AB$	במקבילית $ABHG$ צלעות נגדיות שוות
$GH = 2EG$	משתי הטענות הקודמות

תשובה: הוכחה: EG קטע אמצעים במשולש ABD, ולכן $EG = \frac{1}{2}AB$; במקבילית $GH = AB$, ולכן $GH = 2EG$.

סעיף ב (2)

טענה	נימוק
G אמצע BD	הוכח בסעיף ב (1)
$AG \parallel BH$	במקבילית $ABHG$ צלעות נגדיות מקבילות
$GM \parallel BH$	M על המשך הישר AG
M אמצע DH	במשולש DBH: ישר היוצא מאמצע הצלע DB ומקביל לצלע BH חוצה את הצלע השלישית DH
AM חוצה את DH	M נקודת החיתוך של AM עם DH והיא אמצע DH

תשובה: הוכחה: במשולש DBH, G אמצע DB ו־$GM \parallel BH$, ולכן M אמצע DH.

סעיף ג (1)

נשווה בין הגרפים: איפה כל גרף מתאפס, ואיפה הגרף האחר עולה, יורד או מגיע לקיצון.

- גרף III מתאפס ב־$x=0$ וב־$x=2$, שלילי ביניהם וחיובי מימין ל־2. גרף II יורד ב־$0 < x < 2$, מגיע למינימום ב־$x=2$ ואחר כך עולה. לכן גרף III הוא הנגזרת של גרף II.

- גרף I מתאפס ב־$x = 0.8$, שלילי משמאל לנקודה זו וחיובי מימינה. גרף III יורד עד $x = 0.8$ (שם המינימום שלו) ואחר כך עולה. לכן גרף I הוא הנגזרת של גרף III.

מכאן:
$f(x)$ – גרף II
$f'(x)$ – גרף III
$f''(x)$ – גרף I

תשובה: $f(x)$ **– גרף II**
$f'(x)$ **– גרף III**
$f''(x)$ **– גרף I**

סעיף ג (2)

נקודת הפיתול: $f''(x) = 0$ ומחליפה סימן ב־$x = 0.8$ (גרף I). לפי גרף II הנקודה על גרף f היא:

$$(0.8,\ -2)$$

שיפוע המשיק: לפי גרף III:

$$m = f'(0.8) = -6$$

משוואת המשיק:

$$y - (-2) = -6(x - 0.8)$$
$$y + 2 = -6x + 4.8$$
$$y = -6x + 2.8$$

תשובה: $y = -6x + 2.8$

סעיף ג (3)

$f'(x)$ היא פונקציה קדומה של $f''(x)$, ולכן:

$$\int_0^{0.8} f''(x)\,dx = \Big[f'(x)\Big]_0^{0.8}$$
$$= f'(0.8) - f'(0)$$

לפי גרף III: $f'(0.8) = -6$ ו־$f'(0) = 0$:

$$= -6 - 0 = -6$$

תשובה: -6

סעיף ד (1)

נקודת חיתוך בין הגרפים של $f(x)$ ו־$\frac{1}{f(x)}$ מקיימת:

$$f(x) = \frac{1}{f(x)} \ \Rightarrow\ f^2(x) = 1$$

כלומר $f(x) = 1$ או $f(x) = -1$. נבדוק לפי הגרף:

- **הענפים החיצוניים**, כאשר $x < -1$ או $x > 1$: שם $f(x) > k > 1$, ולכן אין בהם $f(x) = \pm 1$.
- **הענף האמצעי**, כאשר $-1 < x < 1$: הפונקציה שלילית, הערך הגבוה ביותר שלה הוא $-a$, בנקודה $(0, -a)$, והיא יורדת ל־$-\infty$ ליד $x = \pm 1$. לכן הענף מקבל כל ערך קטן מ־$-a$ פעמיים, ואת $-a$ פעם אחת.

כדי שיהיו בדיוק שתי נקודות חיתוך צריך ש־-1 יתקבל פעמיים בענף האמצעי:

$$-1 < -a \;\Rightarrow\; a < 1$$

אם $a = 1$ יש נקודת חיתוך אחת בלבד, $(0, -1)$. אם $a > 1$ אין נקודות חיתוך. a חיובי, ולכן:

$$0 < a < 1$$

תשובה: $0 < a < 1$

סעיף ד (2)

כאשר $x \to \pm\infty$ מתקיים $f(x) \to k$, ולכן:

$$\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{k}$$

האסימפטוטה האופקית של $\frac{1}{f(x)}$ היא $y = \frac{1}{k}$. נתון $k > 1$, ולכן $\frac{1}{k} < k$ והמרחק בין האסימפטוטות:

$$k - \frac{1}{k} = 1.5$$

נכפול ב־k:

$$k^2 - 1.5k - 1 = 0$$

$$k = \frac{1.5 \pm \sqrt{2.25 + 4}}{2} = \frac{1.5 \pm 2.5}{2}$$

$$k = 2 \text{ או } k = -0.5$$

$k > 1$, ולכן $k = 2$.

תשובה: $k = 2$

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 1

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \ldots + (3n-2)(5n-3) = n(5n^2 - 2n - 1)$$

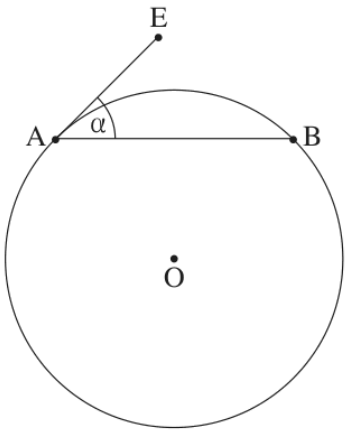
(1) חשבו את הערך של הביטוי: $7 \cdot 12 + 10 \cdot 17 + \ldots + 58 \cdot 97$

ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \ldots + (3n-2)(5n-3) + (3n+1)(5n+2) = (n+1)(5n^2 + 8n + C)$$

(2) מצאו את הערך של C.

ב. הנקודה A נמצאת על מעגל שמרכזו O. מעבירים משיק למעגל בנקודה A, והוא יוצר זווית של α מעלות עם המיתר AB (ראו סרטוט).



(1) הביעו באמצעות α את הזווית AOB.

(2) הביעו באמצעות α את היחס בין אורך הקשת הקטנה AB ובין היקף המעגל.

ג. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ המוגדרת לכל x השונה מ־ 0.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) נתונה הפונקצייה $g(x) = k \cdot f(x+3)$, $k > 0$ הוא פרמטר.
מצאו את הערך של k שעבורו המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקצייה $g(x)$ הוא 10.
נמקו את תשובתכם.

פתרון מלא

סעיף א (1)

האיבר הכללי בסכום הוא:

$$(3k-2)(5k-3)$$

עבור $k=3$ מתקבל האיבר $7 \cdot 12$, ועבור $k=20$ מתקבל האיבר $58 \cdot 97$.

לכן הסכום המבוקש הוא הסכום של 20 האיברים הראשונים פחות הסכום של 2 האיברים הראשונים:

$$S_{20} = 20\,(5 \cdot 20^2 - 2 \cdot 20 - 1)$$

$$= 20 \cdot 1959 = 39180$$

$$S_2 = 2\,(5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 1) = 30$$

$$S_{20} - S_2 = 39180 - 30 = 39150$$

(בדיקה ל־S_2: $1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 30$ ✓)

תשובה: 39150

סעיף א (2)

באגף שמאל יש $n+1$ מחוברים, ולכן לפי הנוסחה הנתונה (עם $n+1$ במקום n):

$$\begin{aligned}&(n+1)\left[5(n+1)^2-2(n+1)-1\right]\\&=(n+1)\left[5n^2+10n+5\right.\\&\qquad\left.-2n-2-1\right]\\&=(n+1)(5n^2+8n+2)\end{aligned}$$

לכן $C=2$.

תשובה: $C=2$

סעיף ב (1)

הזווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני. זווית מרכזית גדולה פי 2 מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת, ולכן:

$$\angle AOB=2\alpha$$

תשובה: $\angle AOB=2\alpha$

סעיף ב (2)

אורך קשת יחסי לזווית המרכזית שלה, והיקף המעגל מתאים לזווית מרכזית של 360°. לכן היחס בין אורך הקשת להיקף המעגל הוא:

$$\frac{2\alpha}{360^\circ}=\frac{\alpha}{180^\circ}$$

תשובה: $\frac{\alpha}{180}$

סעיף ג (1)

אסימפטוטה אנכית: המכנה מתאפס ב־$x=0$, והמונה שם הוא $\sqrt{1}=1$, ולכן $x=0$.

אסימפטוטות אופקיות: נוציא x^2 מהשורש:

$$\sqrt{4x^2+1}=|x|\sqrt{4+\tfrac{1}{x^2}}$$

כאשר $x\to\infty$ (x חיובי):

$$f(x)=\frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x}\to\sqrt{4}=2$$

כאשר $x\to-\infty$ (x שלילי, ולכן $|x|=-x$):

$$f(x)=\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x}\to-2$$

תשובה: אנכית: $x=0$

אופקית (מימין): $y=2$

אופקית (משמאל): $y=-2$

סעיף ג (2)

הזזה אופקית (החלפת x ב־$x+3$) לא משנה אסימפטוטות אופקיות, וכפל ב־k מכפיל אותן ב־k. לכן לפונקציה g יש אסימפטוטות אופקיות:

$$y=2k,\qquad y=-2k$$

המרחק ביניהן:

$$2k - (-2k) = 4k = 10 \;\Rightarrow\; k = 2.5$$

תשובה: $k = 2.5$

סעיף ד (1)

לפי המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי:

$$g'(t) = f(t)$$

לכן g יורדת היכן ש־f שלילית. לפי הגרף, f שלילית בין -2 ל־0:

$$-2 < t < 0$$

תשובה: $-2 < t < 0$

סעיף ד (2)

בנקודת ההתחלה:

$$g(-2) = \int_{-2}^{-2} f(x)\,dx = 0$$

בין -2 ל־0 הפונקציה g יורדת (סעיף ד (1)), ולכן שם היא שלילית.

בין 0 ל־2 הפונקציה g עולה (כי f חיובית שם), עד הערך:

$$g(2) = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$$

(האינטגרל של פונקציה אי־זוגית על תחום סימטרי הוא 0: השטח מתחת לציר שווה לשטח מעליו.)

לכן g עולה מערך שלילי עד 0, והיא אינה חיובית בשום מקום.

תשובה: לא. הפונקציה אינה חיובית בשום מקום בתחום.

סעיף ד (3)

$g''(t) = f'(t)$. לנקודת פיתול של g צריך ש־f' תחליף סימן, כלומר נקודת קיצון של f.

לפי הגרף ל־f יש שתי נקודות קיצון בתוך התחום (מינימום משמאל לראשית ומקסימום מימין לה). בכל אחת מהן f' מחליפה סימן – שם ל־g יש נקודות פיתול.

(בראשית f עולה משני הצדדים – שם f' לא מחליפה סימן, ולכן אין שם נקודת פיתול של g.)

תשובה: כן. בנקודות הקיצון של f (מינימום ומקסימום).

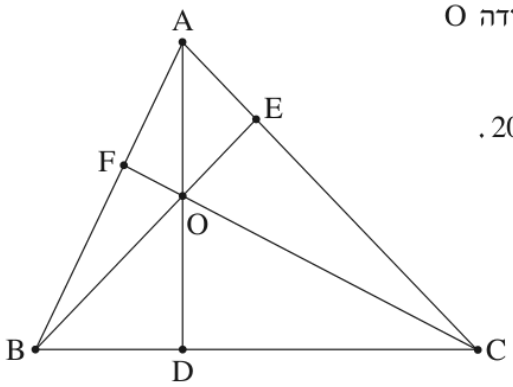
בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 1

1. ענו על <u>שלושה</u> מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות במחברת.

א. הוכיחו באינדוקצייה או בכל דרך אחרת כי בעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

ב. במשולש חד זוויות ABC, הגבהים AD, BE, CF נפגשים בנקודה O (ראו סרטוט).



נתון כי סכום המרחקים של הנקודה O מקודקודי המשולש הוא 20.

(1) הוכיחו שאפשר לחסום במעגל כל אחד מן המרובעים $AEOF, BDOF, CDOE$.

(2) מהו סכום ההיקפים של המעגלים החוסמים את המרובעים $AEOF, BDOF, CDOE$?

ג. נתונה הפונקצייה $f(x)=3+\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$?

(2) ידוע כי האסימפטוטות של גרף הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים, חותכות זו את זו. חשבו את השטח הכלוא בין האסימפטוטות. נמקו את התשובה.

פתרון מלא

סעיף א

שלב 1 – בדיקה עבור $n=1$:

אגף שמאל: $1^2=1$

אגף ימין: $\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$

האגפים שווים, ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב 2 – הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$:

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

שלב 3 – צעד: נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, כלומר:

$$1^2+\cdots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

לפי **ההנחה**, הסכום עד k^2 שווה ל-$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, ולכן אגף שמאל שווה ל:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

נפרק את הטרינום:

$$2k^2+7k+6 = (k+2)(2k+3)$$

ולכן:

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

קיבלנו את אגף ימין. לפי עקרון האינדוקצייה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחה באינדוקצייה מתמטית: בדיקה, הנחה וצעד

סעיף ב (1)

נוכיח עבור $AEOF$; עבור שני המרובעים האחרים ההוכחה זהה.

טענה	נימוק
$\angle AEO = 90^\circ$	BE גובה לצלע AC
$\angle AFO = 90^\circ$	CF גובה לצלע AB
$\angle AEO + \angle AFO = 180^\circ$	חיבור

אפשר לחסום את $AEOF$ במעגל מרובע שבו סכום זוויות נגדיות 180° – אפשר לחסום אותו במעגל באותו אופן: ב־$BDOF$ מתקיים $\angle BDO = \angle BFO = 90^\circ$ (הגבהים AD ו־CF), וב־$CDOE$ מתקיים $\angle CDO = \angle CEO = 90^\circ$ (הגבהים AD ו־BE).

תשובה: הוכחה: בכל מרובע יש שתי זוויות נגדיות ישרות, שסכומן 180°

סעיף ב (2)

במרובע $AEOF$ הזווית $\angle AEO = 90^\circ$ היא זווית היקפית במעגל החוסם, ולכן היא נשענת על קוטר: AO הוא קוטר המעגל החוסם את $AEOF$. באותו אופן BO קוטר המעגל החוסם את $BDOF$, ו־CO קוטר המעגל החוסם את $CDOE$.

היקף מעגל שקוטרו d הוא πd, ולכן סכום ההיקפים:

$$\pi \cdot AO + \pi \cdot BO + \pi \cdot CO$$
$$= \pi(AO + BO + CO) = 20\pi$$

תשובה: 20π

סעיף ג (1)

הביטוי שבתוך השורש נמצא במכנה, ולכן הוא חייב להיות חיובי ממש:

$$x^2 - 25 > 0 \Rightarrow x^2 > 25$$
$$x < -5$$

או

$$x > 5$$

תשובה: $x < -5$ **או** $x > 5$

סעיף ג (2)

אסימפטוטות אנכיות: כאשר $x \to 5^+$ או $x \to -5^-$ המכנה שואף ל־0 והמונה ל־± 5, ולכן $x = 5$ ו־$x = -5$ אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטות אופקיות: עבור $x > 0$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-25}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-25}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$$

ולכן $y = 3+1 = 4$ היא אסימפטוטה אופקית מימין.

עבור $x < 0$ מתקיים $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, ולכן:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-25}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$$

ולכן $y = 3-1 = 2$ היא אסימפטוטה אופקית משמאל.

ארבע האסימפטוטות יוצרות מלבן:

$$x=-5,\ \ x=5,\ \ y=2,\ \ y=4$$

אורכו $5-(-5)=10$ ורוחבו $4-2=2$:

$$S = 10 \cdot 2 = 20$$

תשובה: 20 יחידות שטח

סעיף ד (1)

נגזור:

$$f'(x) = \frac{a(x^2-4) - ax\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-a(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

עבור $a > 0$: $f'(x) < 0$ לכל x בתחום, כלומר f יורדת בכל אחד מהקטעים. בנוסף $f(0) = 0$, ועבור $x > 2$ מתקיים $f(x) > 0$.

הגרפים א, ג, ד אינם מתאימים: א ו־ג סימטריים לציר ה־y (פונקצייה זוגית), אבל $f(-x) = -f(x)$ (אי־זוגית); בגרף ד הענף האמצעי עולה. בגרף ב כל הענפים יורדים והגרף עובר בראשית.

תשובה: גרף ב

סעיף ד (2)

עבור $a < 0$: $f'(x) = \frac{-a(x^2+4)}{(x^2-4)^2} > 0$ לכל x בתחום, כלומר f עולה בכל אחד מהקטעים, והגרף עובר בראשית וסימטרי לראשית. בגרף ה כל הענפים עולים, והוא היחיד שמתאים.

תשובה: גרף ה

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 1

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות במחברת.

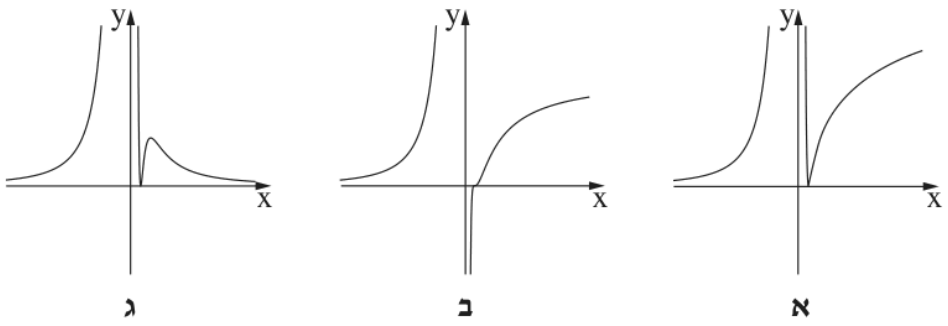
א. **(1)** בעבור כל n טבעי, הוכיחו באינדוקצייה או בדרך אחרת כי הביטוי 4^n-1 מתחלק ב־ 3 ללא שארית.

(2) נתון: p הוא מספר שלם.

כתבו דוגמה לערך של p שבעבורו הביטוי $4^{n+1}+p$ מתחלק ב־ 12 ללא שארית, לכל n טבעי.

ב. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\left(2-\frac{1}{x}\right)^3$.

(1) אחד מן הגרפים א–ג מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קִבעו איזה מהם ונמקו בקצרה.



ג ב א

(2) קִבעו כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $f(x)$. נמקו את התשובה.

פתרון מלא

סעיף א (1)

נוכיח באינדוקציה ש־4^n-1 מתחלק ב־3 לכל n טבעי.

בדיקה עבור $n=1$: $4^1-1=3$, מתחלק ב־3 ✓

הנחה: נניח שעבור $n=k$ המספר 4^k-1 מתחלק ב־3, כלומר $4^k-1=3m$ עבור m שלם.

צעד: נוכיח עבור $n=k+1$:

$$4^{k+1}-1=4\cdot 4^k-1$$
$$=4\cdot 4^k-4+3=4(4^k-1)+3$$

לפי ההנחה $4(4^k-1)=4\cdot 3m=12m$, ולכן:

$$4^{k+1}-1=12m+3=3(4m+1)$$

זהו מספר שמתחלק ב־3, ולכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחה באינדוקציה. בצעד האינדוקציה:
$4^{k+1}-1=4(4^k-1)+3$
ושני המחוברים מתחלקים ב־3.

סעיף א (2)

נכתוב את הביטוי בעזרת 4^n-1:

$$4^{n+1}+p=4\cdot 4^n+p$$
$$=4(4^n-1)+4+p$$

לפי סעיף א (1), 4^n-1 מתחלק ב־3, ולכן $4(4^n-1)$ מתחלק ב־12 לכל n. מספיק לבחור p כך ש־$4+p$ יתחלק ב־12, למשל:

$$4+p=12 \;\Rightarrow\; p=8$$

בדיקה: עבור $n=1$: $16+8=24$; עבור $n=2$: $64+8=72$ – שניהם מתחלקים ב־12.

תשובה: לדוגמה $p=8$.

מתאים כל p שעבורו $p+4$ מתחלק ב־12.

סעיף ב (1)

נגזור לפי כלל השרשרת, עם $\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}$:

$$f'(x)=3\left(2-\frac{1}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{3(2x-1)^2}{x^4}$$

מה אפשר ללמוד מהביטוי:

- $f'(x)\geq 0$ לכל $x\neq 0$ – הגרף לא יורד מתחת לציר x. לכן גרף ב נפסל.
- $f'(x)=0$ רק ב־$x=\frac{1}{2}$ – הגרף נוגע בציר x מימין לציר y.
- עבור x גדול מאוד הגרף מתקרב לציר x, כי:

$$f'(x)\approx\frac{12x^2}{x^4}=\frac{12}{x^2}\to 0$$

בגרף א הגרף עולה מימין ולא מתקרב ל־0, ולכן נפסל.

לכן גרף ג מתאר את $f'(x)$.

תשובה: גרף ג

סעיף ב (2)

בנקודת פיתול של f הנגזרת f' עוברת מעלייה לירידה או להפך, כלומר יש לה נקודת קיצון. בגרף ג רואים שתי נקודות קיצון של f': מינימום ב־$x=\frac{1}{2}$, שבו הגרף נוגע בציר, ומקסימום מימינו. לכן ל־f יש 2 נקודות פיתול.

אפשר לוודא בחישוב:

$$f''(x)=\frac{12(2x-1)(1-x)}{x^5}$$

f'' מתאפסת ומחליפה סימן ב־$x=\frac{1}{2}$ וב־$x=1$. הנקודות הן $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ו־$(1,1)$.

תשובה: 2 נקודות פיתול: $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ו־$(1,1)$

סעיף ג (1)

$h(t)$ הוא השטח „המכוון" בין גרף f לציר x מ־0 עד t: שטח מעל הציר נספר בחיוב, ושטח מתחת לציר בשלילה.

$$h(0)=\int_0^0 f(x)\,dx=0$$

מ־0 עד 3 הגרף מעל הציר. נחלק לשלושה חלקים:

- $0\leq x\leq 1$: מלבן 2×1, שטח 2.
- $1\leq x\leq 2$: טרפז עם בסיסים 2 ו־4 וגובה 1, שטח $\frac{2+4}{2}=3$.
- $2\leq x\leq 3$: משולש עם בסיס 1 וגובה 4, שטח 2.

$$h(3)=2+3+2=7$$

מ־3 עד 5 הגרף מתחת לציר: משולש עם בסיס 2 וגובה 2, שטח 2:

$$h(5)=7-2=5$$

תשובה: $h(0)=0$**,** $h(3)=7$**,** $h(5)=5$

סעיף ג (2)

$h(t)$ היא פונקציה קדומה של f, כלומר $h'(t)=f(t)$. לכן h יורדת היכן ש־$f(t)<0$, כלומר היכן שהגרף מתחת לציר x. לפי הסרטוט זה קורה בתחום:

$$3<t<7$$

תשובה: $3<t<7$**, כי שם** $h'(t)=f(t)<0$

סעיף ד

נסמן: D – מפגש המשיקים ב־A וב־C, E – מפגש המשיקים ב־A וב־B, F – מפגש המשיקים ב־B וב־C, כמו בסרטוט.

זוויות הבסיס במשולש שווה השוקיים ABC:

$$\angle ABC=\angle ACB=\frac{180^\circ-2\alpha}{2}$$
$$=90^\circ-\alpha$$

הזווית D**.** לפי משפט הזווית בין משיק למיתר: $\angle DAC=\angle ABC=90^\circ-\alpha$. שני משיקים היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה, $DA=DC$, ולכן גם $\angle DCA=90^\circ-\alpha$:

$$\angle D=180^\circ-2(90^\circ-\alpha)=2\alpha$$

הזווית E**.** באותו אופן: $\angle EAB=\angle ACB=90^\circ-\alpha$ ו־$EA=EB$, ולכן:

$$\angle E=2\alpha$$

הזווית F, מסכום הזוויות במשולש DEF:

$$\angle F=180^\circ-4\alpha$$

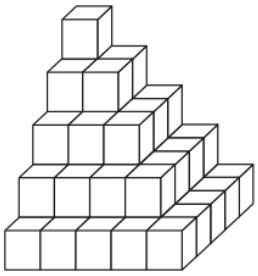
תשובה: $\angle D=\angle E=2\alpha$
$\angle F=180^\circ-4\alpha$

בגרות חורף נבצרים תשפ"ב (2022) • שאלה 1

1. ענה על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניך. אם תענה על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

א. נתון מרובע $ABCD$ שבו גודלי הזוויות מהווים סדרה חשבונית עולה. איברי הסדרה הם a_1, a_2, a_3, a_4.
הוכח כי אם מתקיים $\sphericalangle D = a_3$, $\sphericalangle C = a_4$, $\sphericalangle B = a_2$, $\sphericalangle A = a_1$, אז אפשר לחסום את המרובע $ABCD$ במעגל.

ב. נתון מגדל קוביות ובו 5 קומות (ראה ציור).



הקומה התחתונה בנויה מ־ 25 קוביות המסודרות בצורת ריבוע.
הקומה שמעליה בנויה מ־ 16 קוביות המסודרות בצורת ריבוע.
וכך הלאה עד לקומה העליונה שבה יש קובייה אחת.

(1) כמה קוביות סך הכול דרושות כדי לבנות באותו אופן מגדל שבו 7 קומות?

(2) נתון מגדל ובו 10 קומות הבנוי באותו אופן שבו בנוי המגדל המתואר בתחילת סעיף ב.
כמה קוביות צריך להוסיף למגדל זה, כדי שיהיו בו 100 קומות הבנויות באותו אופן? פרט את חישוביך.
תוכל להיעזר בנוסחה (לכל n טבעי): $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

ג. נתונה הפונקציה $f(x) = [\cos(x-\pi) + \cos(\pi - x)]^2 + 4(\sin(-x))^2 - 5$ המוגדרת לכל x.
האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה־ x? נמק את תשובתך.

פתרון מלא

סעיף א

הסדרה a_1, a_2, a_3, a_4 חשבונית, ולכן סכום האיברים הקיצוניים שווה לסכום האיברים האמצעיים:

$$a_1 + a_4 = a_1 + (a_1 + 3d) = 2a_1 + 3d$$
$$a_2 + a_3 = (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 2a_1 + 3d$$

כלומר $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$.

סכום הזוויות במרובע הוא 360°:

$$(a_1 + a_4) + (a_2 + a_3) = 360^\circ$$

שני הסכומים שווים, ולכן כל אחד מהם 180°:

$$\angle A + \angle C = a_1 + a_4 = 180^\circ$$
$$\angle B + \angle D = a_2 + a_3 = 180^\circ$$

במרובע $ABCD$ סכום כל זוג זוויות נגדיות הוא 180°, ולכן אפשר לחסום אותו במעגל.

תשובה: מתקיים $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$, ולכן סכום כל זוג זוויות נגדיות הוא 180°.

סעיף ב (1)

בקומה ה־n מלמעלה יש n^2 קוביות: $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

במגדל בן 7 קומות:

$$S_7 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 7^2$$
$$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49$$
$$= 140$$

אפשר גם לפי הנוסחה הנתונה:

$$S_7 = \frac{7}{6} \cdot 8 \cdot 15 = 140$$

תשובה: 140 קוביות.

סעיף ב (2)

לפי הנוסחה, במגדל בן n קומות יש:

$$S_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

במגדל הנתון, בן 10 קומות:

$$S_{10} = \frac{10}{6} \cdot 11 \cdot 21 = 385$$

במגדל בן 100 קומות:

$$S_{100} = \frac{100}{6} \cdot 101 \cdot 201 = 338{,}350$$

צריך להוסיף:

$$338{,}350 - 385 = 337{,}965$$

תשובה: 337,965 קוביות.

סעיף ג

נפשט כל מחובר:

$$\cos(x - \pi) = -\cos x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$

לכן:

$$f(x) = (-2\cos x)^2 + 4(-\sin x)^2 - 5$$
$$= 4\cos^2 x + 4\sin^2 x - 5$$
$$= 4(\cos^2 x + \sin^2 x) - 5 = 4 - 5 = -1$$

$f(x) = -1$ לכל x – פונקציה קבועה שגרפה הוא ישר מתחת לציר ה־x. לכן **אין** לה נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

תשובה: לא. $f(x) = -1$ **לכל** x.

סעיף ד (1)

הפונקציה $\frac{1}{g(x)}$ מוגדרת כאשר $g(x)$ מוגדרת וגם $g(x) \neq 0$.

- הפונקציה g אינה מוגדרת בנקודות $x = -1$ ו־$x = 1$.
- הפונקציה g מתאפסת רק בנקודה $C(2, 0)$, כלומר ב־$x = 2$.

תחום ההגדרה:

$$x \neq -1, \quad x \neq 1, \quad x \neq 2$$

תשובה: $x \neq \pm 1$ **וגם** $x \neq 2$

סעיף ד (2)

הגרפים נפגשים כאשר:

$$g(x) = \frac{1}{g(x)}$$
$$g^2(x) = 1$$
$$g(x) = 1 \text{ או } g(x) = -1$$

$g(x) = 1$**:** הערך 1 הוא המינימום היחיד של הענף האמצעי (בנקודה A) והמקסימום היחיד של הענף הימני (בנקודה B). בענף השמאלי g שלילית. לכן יש בדיוק שתי נקודות: A ו־B.

$g(x) = -1$**:**

- בענף השמאלי הפונקציה יורדת מ־0 ל־$-\infty$, ולכן מקבלת את הערך -1 פעם אחת.
- בענף הימני, בין $x = 1$ ל־$x = 2$, הפונקציה עולה מ־$-\infty$ ל־0, ולכן מקבלת את הערך -1 פעם אחת.
- בענף האמצעי $g(x) \geq 1$.

סך הכול: $2 + 2 = 4$ נקודות מפגש.

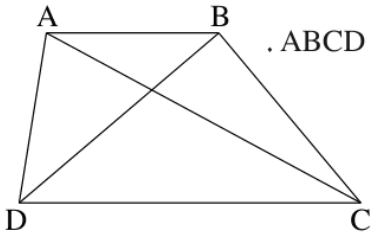
תשובה: ב־4 נקודות.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 1

1. ענה על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניך. אם תענה על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות במחברתך.

א. לפניך טרפז $ABCD$ $(AB \parallel CD)$.

נתון: שטח המשולש ADC הוא 24 ושטח המשולש ADB הוא 12.



(1) חשב את היחס בין אורך הבסיס הגדול ובין אורך הבסיס הקטן של הטרפז $ABCD$.

(2) חשב את שטח הטרפז $ABCD$.

ב. **(1)** בעבור כל n טבעי, הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת את הטענה:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$

(2) חשב את המכפלה:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

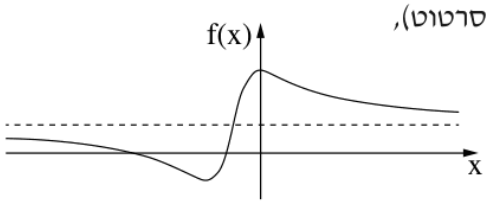
ג. בעבור כל אחת מן הטענות (1)–(2) שלפניך, קבע אם היא נכונה לכל x. נמק.

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

ד. לפניך הגרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x.

לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אופקית שמשוואתה היא $y=1$ (ראה סרטוט),



ו־2 נקודות קיצון בדיוק:

נקודת מקסימום $(0\ ,\ 3)$

ונקודת מינימום $(-2\ ,\ -1)$.

נגדיר את הפונקציה $g(x)=f(-x)+1$. גם הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x.

(1) מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$. נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

פתרון מלא

סעיף א (1)

לשני המשולשים ADC ו־ADB יש אותו גובה – הגובה h של הטרפז, כי $AB \parallel DC$.

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}}=\frac{\frac{DC\cdot h}{2}}{\frac{AB\cdot h}{2}}=\frac{DC}{AB}$$

נציב את הנתונים:

$$\frac{DC}{AB}=\frac{24}{12}=2$$

תשובה: $\frac{DC}{AB}=2$

סעיף א (2)

המשולשים ABC ו־ABD בעלי אותו בסיס AB ואותו גובה (המרחק בין הבסיסים המקבילים), ולכן:

$$S_{ABC} = S_{ABD} = 12$$

האלכסון AC מחלק את הטרפז לשני משולשים:

$$S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ABC}$$
$$= 24 + 12 = 36$$

תשובה: $S_{ABCD} = 36$

סעיף ב (1)

נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי:

$$\left(1+\tfrac{1}{1}\right)\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\tfrac{1}{n}\right)$$
$$= n+1$$

שלב 1 – בדיקה עבור $n = 1$:

אגף שמאל:

$$1+\tfrac{1}{1} = 2$$

אגף ימין:

$$1+1 = 2$$

האגפים שווים, ולכן הטענה נכונה עבור $n = 1$.

שלב 2 – הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$:

$$\left(1+\tfrac{1}{1}\right)\cdots\left(1+\tfrac{1}{k}\right) = k+1$$

שלב 3 – צעד: נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k+1$, כלומר:

$$\left(1+\tfrac{1}{1}\right)\cdots\left(1+\tfrac{1}{k}\right)\left(1+\tfrac{1}{k+1}\right)$$
$$= k+2$$

לפי ההנחה, מכפלת k הגורמים הראשונים שווה ל־$k+1$, ולכן אגף שמאל שווה ל:

$$(k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= (k+1)\cdot\frac{k+2}{k+1} = k+2$$

קיבלנו את אגף ימין. לפי עקרון האינדוקציה המתמטית הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הוכחה באינדוקציה: בדיקה עבור $n = 1$, הנחה עבור $n = k$, צעד עבור $n = k+1$.

סעיף ב (2)

המכפלה המבוקשת היא המכפלה מסעיף ב (1) עבור $n = 99$, בלי הגורם הראשון $1+\tfrac{1}{1} = 2$.

לפי סעיף ב (1) עם $n = 99$:

$$\left(1+\tfrac{1}{1}\right)\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\tfrac{1}{99}\right) = 100$$

נחלק בגורם הראשון:

$$\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\tfrac{1}{99}\right) = \frac{100}{2}$$

$= 50$

תשובה: 50

סעיף ג (1)

נשתמש בזהות $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ ובזהות $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$:

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi - \left(\tfrac{\pi}{2} + x\right)\right)$$
$$= \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

שני האגפים שווים ל־$\cos x$ לכל x, ולכן הטענה נכונה לכל x.

תשובה: נכונה לכל x – שני האגפים שווים ל־$\cos x$.

סעיף ג (2)

מספיקה דוגמה נגדית אחת. נציב $x = 0$:

אגף שמאל:

$$\sin\tfrac{\pi}{2} = 1$$

אגף ימין:

$$\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = -1$$

האגפים שונים, ולכן הטענה אינה נכונה לכל x.

באופן כללי, כי סינוס היא פונקציה אי־זוגית:

$$\sin\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

והשוויון מתקיים רק כאשר $\cos x = 0$.

תשובה: לא נכונה לכל x (למשל עבור $x = 0$ מתקבל $1 \neq -1$).

סעיף ד (1)

הגרף של $f(-x)$ הוא שיקוף של גרף f ביחס לציר ה־y, והגרף של $g(x) = f(-x) + 1$ מתקבל ממנו בהזזה של יחידה אחת כלפי מעלה.

לפונקציה f יש אסימפטוטה אופקית $y = 1$ גם כאשר $x \to \infty$ וגם כאשר $x \to -\infty$. השיקוף ביחס לציר ה־y לא משנה את האסימפטוטה האופקית, וההזזה מעלה אותה ביחידה:

$$y = 1 + 1 = 2$$

תשובה: $y = 2$

סעיף ד (2)

בשיקוף ביחס לציר ה־y שיעור ה־x של כל נקודה מחליף סימן, וסוג נקודת הקיצון נשמר. בהזזה כלפי מעלה שיעור ה־y גדל ב־1.

המקסימום של f:

$$(0,3) \;\to\; (0,3) \;\to\; (0,4)$$

המינימום של f:

$$(-2,-1) \;\to\; (2,-1) \;\to\; (2,0)$$

תשובה: מקסימום $(0,4)$, מינימום $(2,0)$

הפתרונות נכתבו בעזרת בינה מלאכותית ונבדקו, אך ייתכנו טעויות – ללא אחריות. מומלץ להשוות לפתרון הרשמי.