שלבי הפתרון בשאלות סדרות

מתמטיקה • כיתה י״א • 5 יחידות לימוד (שאלון 571)

איזו סדרה נתונה?

סדרה חשבונית

הפרש קבוע d בין איברים עוקבים

1 מבטאים כל נתון בעזרת a_1, d

$a_n = a_1 + (n-1)d$ • למשל $a_{17} = a_1 + 16d$

2 פותרים ומוצאים a_1 ו-d

2 משוואות ← 2 נעלמים

עולה: $d > 0$, יורדת: $d < 0$

3 סכום S_n

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

סדרה הנדסית

מנה קבועה q בין איברים עוקבים

1 מבטאים כל נתון בעזרת a_1, q

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ • מחלקים: $\frac{a_4}{a_2} = q^2$

2 מוצאים q ובוחרים סימן

$q^2 = 4$ ← $q = \pm 2$

סימנים מתחלפים ← $q < 0$

3 סכום S_n או טור אין־סופי S

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

אם $|q| < 1$: $S = \frac{a_1}{1 - q}$

סדרה חדשה b_n שנבנית מהסדרה הנתונה

4 מבטאים את b_n

מציבים את האיבר הכללי בהגדרה של b_n ומפשטים

5 מוכיחים את הסוג

חשבונית: $b_{n+1} - b_n$ קבוע

הנדסית: $b_{n+1} : b_n$ קבוע

6 אי־זוגיים / זוגיים

גם הם סדרה: הפרש $2d$ או מנה q^2

דוגמה – חשבונית

נתון: $a_3 = 2$, $a_7 = 14$. מצאו את S_{10}

1. $a_1 + 2d = 2$, $a_1 + 6d = 14$
2. מחסרים: $4d = 12$ ← $d = 3$, $a_1 = -4$
3. $S_{10} = \frac{10[2\cdot(-4) + 9\cdot 3]}{2} = 5 \cdot 19$

תשובה: $S_{10} = 95$

דוגמה – מקומות אי־זוגיים

סדרה הנדסית אין־סופית: $a_1 = 12$, $q = ½$. מה סכום האיברים במקומות האי־זוגיים?

1. $a_1, a_3, a_5, \ldots$: איבר ראשון 12, מנה $q^2 = ¼$
2. $-1 < ¼ < 1$ ← הטור מתכנס
3. $S = \frac{12}{1 - ¼} = \frac{12}{¾} = 16$

תשובה: 16 (הזוגיים: 8, כל הטור: 24)

לזכור

- $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$
- מ-a_k עד a_m יש $m - k + 1$ איברים
- $b_n = 1/a_n$ ← הנדסית עם מנה $1/q$

טעות נפוצה

- $q^2 = 4$ נותן **שני** פתרונות – בודקים איזה מתאים לנתונים
- נוסחת S רק לטור מתכנס: $-1 < q < 1$, $q \neq 0$
- "קבוע" = ביטוי שאין בו n