שלבי הפתרון בשאלות קצרות

מתמטיקה • כיתה י״א • 5 יחידות לימוד (שאלון 571)

מה שואלים בסעיף?

מסלול 1 • הוכחה באינדוקציה

"הוכיחו שלכל n טבעי...": סכום • מכפלה • התחלקות

1. **בדיקה עבור $n = 1$**
   מחשבים כל אגף בנפרד ומראים שהם שווים
2. **הנחה: נכון עבור $n = k$**
   כותבים את הטענה עם k במקום n
3. **צעד: מוכיחים עבור $n = k + 1$**
   סכום: מה שבהנחה + המחובר ה-$(k+1)$ •
   מכפלה: כופלים בגורם הבא • התחלקות: יוצרים בביטוי את ביטוי ההנחה

מסלול 2 • גאומטריה: הוכחה וחישוב

מעגל • דמיון • יחס שטחים

1. **משרטטים ומסמנים את הנתונים**
   זוויות, צלעות שוות, ישרים מקבילים, רדיוסים
2. **טענה ← נימוק, שורה אחר שורה**
   זווית היקפית על קוטר = 90° • משיק ⊥ רדיוס • מרובע חסום: זוויות נגדיות = 180°
3. **מחשבים יחס / אורך / שטח**
   דמיון: יחס השטחים = יחס הדמיון בריבוע • אותו גובה: יחס השטחים = יחס הבסיסים

מסלול 3 • גרפים של f, f', f''

התאמת גרפים • פונקציה צוברת שטח

1. **מתאימים לפי אפסים וסימן**
   $f' = 0$ ← קיצון של f • $f' > 0$ ← f עולה • f'' מחליפה סימן ← פיתול
2. $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
   $g'(x) = f(x)$: g עולה כש-f מעל ציר x • $g(a) = 0$
3. $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$
   שטח מתחת לציר x נכנס במינוס • מפצלים בנקודות האפס

מסלול 4 • פונקציה חדשה מתוך f

$1/f$ • $\sqrt{f}$ • $|f|$ • $f + m$ • $f(-x)$

1. **תחום הגדרה**
   $1/f$: צריך $f \neq 0$ • $\sqrt{f}$: צריך $f \geq 0$
2. **אסימפטוטות**
   אפס של f ← אסימפטוטה אנכית של $1/f$ • $f \to \infty$ ← $y = 0$
3. **עלייה / ירידה וקיצון**
   $|f|$ – שיקוף מה שמתחת לציר x • $1/f$ עולה כש-f יורדת • $\sqrt{f}$ כמו f

דוגמה למסלול 1

הוכיחו ש-$4^n - 1$ מתחלק ב-3 לכל n טבעי

1. $n = 1 : 4^1 - 1 = 3$ ✓
2. הנחה: $4^k - 1 = 3m$ (m שלם)
3. $4^{k+1} - 1 = 4(4^k - 1) + 3$
4. $= 4 \cdot 3m + 3 = 3(4m + 1)$ ✓

מסקנה: לפי עקרון האינדוקציה – נכון לכל n טבעי

נכון / לא נכון?

- נכון ← הוכחה **כללית**
- לא נכון ← מספיקה **דוגמה נגדית אחת** (מציבים מספר, למשל $x = 0$)
- $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
- $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

⚠ טעות נפוצה

- בצעד **חייבים** להשתמש בהנחה
- סכום שלא מתחיל באיבר הראשון: הנוסחה פחות המחוברים החסרים
- ב-$1/f$ האפסים של f יוצאים מהתחום