שלבי הפתרון בשאלות מספרים מרוכבים

מתמטיקה • כיתה י"ב • 5 יחידות לימוד (שאלון 572)

מה נתון בשאלה?

✏️ הצגה אלגברית

משוואה עם $|z|$, $\bar{z}$, z

1 מציבים $z = x + yi$

$i^2 = -1$, $\bar{z} = x - yi$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2 מסדרים: ממשי + מדומה

כל אגף בצורה $a + bi$

3 משווים חלקים

ממשי = ממשי, מדומה = מדומה.

מקבלים שתי משוואות ב־x , y

🔄 כפל, חילוק, חזקה

עוברים להצגה קוטבית $r \operatorname{cis} \theta$

1 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

המרחק של z מהראשית

2 זווית: $\tan\theta = \frac{y}{x}$

בוחרים לפי הרביע: משרטטים את (x , y)

3 דה־מואבר:

$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$

ממשי: $n\theta = 180°k$

מדומה טהור: $n\theta = 90° + 180°k$

🌟 משוואה $z^n = w$

מוצאים את כל n הפתרונות

1 כותבים $w = R \operatorname{cis} \varphi$

מוצאים R ו־φ כמו במקרה האמצעי

2 נוסחת השורשים

$z_k = \sqrt[n]{R} \operatorname{cis} \frac{\varphi + 360°k}{n}$

3 $k = 0 , 1 , \dots , n - 1$

הפתרונות: קודקודי מצולע משוכלל על מעגל, הפרש זווית $\frac{360°}{n}$

שאלה גאומטרית במישור המרוכב?

מעגל: $|z - z_0| = R$

מרכז z_0 , רדיוס R • או מציבים $z = x + yi$

אנך אמצעי: $|z - a| = |z - b|$

הנקודות שמרחקן מ־a ומ־b שווה

סיבוב: כפל ב־i ← סיבוב $90°$

כפל ב־$r \operatorname{cis} \alpha$ ← סיבוב α ומתיחה פי r

✏️ דוגמה: הצגה אלגברית וחזקה

פתרו $z + 2\bar{z} = 6 - 2i$ וחשבו את z^4

1. $x + yi + 2x - 2yi = 3x - yi = 6 - 2i$
2. $3x = 6 , -y = -2$ ← $z = 2 + 2i$
3. $r = 2\sqrt{2} , \theta = 45°$ ← $z^4 = 64 \operatorname{cis} 180° = -64$

תשובה: $z = 2 + 2i$ • $z^4 = -64$

✏️ דוגמה: שורשים

פתרו את המשוואה $z^3 = 8i$

1. $8i = 8 \operatorname{cis} 90°$
2. $z_k = \sqrt[3]{8} \operatorname{cis} \frac{90° + 360°k}{3} = 2 \operatorname{cis}(30° + 120°k)$
3. $k = 0 , 1 , 2$: $2 \operatorname{cis} 30° , 2 \operatorname{cis} 150° , 2 \operatorname{cis} 270°$

תשובה: $\sqrt{3} + i , -\sqrt{3} + i , -2i$

📐 מהנוסחאון

כפל: $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

דה־מואבר: $[R \operatorname{cis} \varphi]^n = R^n \operatorname{cis}(n\varphi)$

💡 לזכור (לא בנוסחאון)

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $\bar{z} = r \operatorname{cis}(-\theta)$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\theta)$

⚠️ טעות נפוצה

- כש־$x < 0$: מוסיפים $180°$ לזווית מהמחשבון
- ל־$z^n = w$ יש בדיוק n פתרונות
- מדומה טהור: החלק הממשי 0