שלבי הפתרון בשאלות פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

מתמטיקה • כיתה י"ב • 5 יחידות לימוד (שאלון 572)

מה שואלים?

מסלול 1 • חקירת פונקציה

לפי הסדר – כל סעיף נשען על הקודם

1 תחום הגדרה

$\ln A$ ← $A > 0$ • מכנה $\neq 0$ • e^x – לכל x

2 חיתוך עם הצירים

$x = 0$ ו־$y = 0$ • הרבה e^x? מציבים $t = e^x > 0$

3 אסימפטוטות

אנכית: מכנה $= 0$ / קצה תחום של $\ln$

אופקית: $x \to +\infty$ ו־$x \to -\infty$ **בנפרד**

4 נגזרת • קיצון • עלייה/ירידה

$f'(x) = 0$ + טבלת סימנים • $e^x > 0$, הסימן לפי הגורם השני

5 נקודות פיתול

$f''(x) = 0$ **וגם** f'' מחליפה סימן

6 סקיצה

אסימפטוטות ← חיתוכים ← קיצון ← עלייה/ירידה

מסלול 2 • סעיפי המשך

משתמשים בתוצאות של החקירה

1 פונקציה חדשה מתוך f

$g = \ln f$: תחום $f > 0$

$g' = \frac{f'}{f}$ – עולה/יורדת כמו f

$g = e^f$: $g' = f' \cdot e^f$

אותו סימן כמו f' • $g > 0$

$g = \frac{1}{f}$: $f = 0$ ← אסימפטוטה

סימן g' הפוך לסימן f'

2 פרמטר

נקודה על הגרף ← מציבים

קיצון ← $f' = 0$ • אסימפטוטה ← גבול

3 שטח • אינטגרל

חיתוכים = גבולות • מי מעל מי?

מונה = נגזרת המכנה ← $\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f|$

דוגמה למסלול 1 (הצבה)

$f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x - 4}{4}$

2 $t = e^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0$

2 $t = 4$ ← $x = \ln 4$ • $t = -1$ נפסל

3 $x \to -\infty$: $e^x \to 0$ ← $y = -1$

4 $f' = \frac{e^x(2e^x - 3)}{4} = 0$ ← $x = \ln 1.5$

תשובה: חיתוך $(0 , \ln 4)$ • מינימום $(\ln 1.5 , -1.5625)$

דוגמה למסלול 2 (שטח)

חשבו $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ (הפונקציה חיובית)

המונה הוא הנגזרת של המכנה: $(e^x + 1)' = e^x$

3 $= [\ln(e^x + 1)]_0^{\ln 3}$

3 $= \ln(3 + 1) - \ln(1 + 1) = \ln 4 - \ln 2$

תשובה: $\ln 2 \approx 0.69$

מהנוסחאון

$(e^x)' = e^x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln a^n = n \cdot \ln a$

לזכור

- $e^x > 0$ תמיד, $e^{\ln a} = a$
- $\ln x < 0$ כאשר $0 < x < 1$
- $x \to -\infty$: $e^x \to 0$
- $x \to 0^+$: $\ln x \to -\infty$

טעות נפוצה

- $e^x = -1$ – אין פתרון, פוסלים
- $\ln(a + b)$ אינו $\ln a + \ln b$
- תחום של $\ln A$: $A > 0$, לא $A \geq 0$
- אסימפטוטה אופקית: בודקים את **שני** הכיוונים