שלבי הפתרון בשאלות גדילה ודעיכה

מתמטיקה • כיתה י"ב • 5 יחידות לימוד (שאלון 572)

שלב א' • מסדרים את הנתונים

1 גדילה או דעיכה?

גדל ב־$p\%$ ← גדילה

קטן ב־$p\%$ ← דעיכה

2 מוצאים את q

$q = \frac{100 \pm p}{100}$ • פי k ← $q = k$

מחצית חיים: $q^T = 0.5$

3 כותבים את הנוסחה

$A_t = A_0 \cdot q^t$

A_0 – הכמות בזמן $t = 0$

מה שואלים?

מקרה 1 • מחפשים כמות או q

t ידוע

4 הכמות אחרי t יחידות זמן

מציבים A_0, q, t – קודם החזקה, אחר כך הכפל

5 הכמות בהתחלה A_0

$A_0 = \frac{A_t}{q^t}$ • **לפני** t שנים ← מציבים t שלילי

6 מוצאים q ואת האחוז p

$q^t = \frac{A_t}{A_0}$ ← $q = (\frac{A_t}{A_0})^{1/t}$

$q = 0.87$ ← ירידה של 13%

מקרה 2 • מחפשים את הזמן t

t במעריך ← לוגריתם

4 מבודדים את החזקה

מחלקים ב־A_0: $q^t = \frac{A_t}{A_0}$

5 מוציאים $\ln$ משני האגפים

$t \cdot \ln q = \ln \frac{A_t}{A_0}$ ← $t = \frac{\ln(A_t / A_0)}{\ln q}$

6 „לראשונה" / שנים שלמות

מעגלים **כלפי מעלה** ובודקים בהצבה

אי־שוויון בדעיכה: $\ln q < 0$ ← הסימן מתהפך

7 קצב השינוי • ותשובה במילים

קצב ברגע t: נגזרת $A'(t) = A_0 \cdot q^t \cdot \ln q$ • שינוי **כולל** באחוזים: $\frac{A_t}{A_0}$, לא מחברים אחוזים

דוגמה למקרה 1

80 גרם חומר, זמן מחצית החיים 5 שנים. כמה יישאר אחרי 12 שנים?

2 $q^5 = 0.5$ ← $q = 0.5^{1/5} \approx 0.8706$

3 $A_t = 80 \cdot 0.8706^t$

4 $A_{12} = 80 \cdot 0.5^{12/5} \approx 15.16$

תשובה: כ־15.16 גרם • ירידה של כ־12.9% בשנה

דוגמה למקרה 2

2000 תושבים, גידול של 6% בשנה. מתי לראשונה יותר מ־5000?

4 $2000 \cdot 1.06^t = 5000$ ← $1.06^t = 2.5$

5 $t = \frac{\ln 2.5}{\ln 1.06} \approx 15.73$

6 $A_{15} \approx 4793$ • $A_{16} \approx 5081$

תשובה: לראשונה אחרי **16 שנים**

מהנוסחאון

$$A_t = A_0 \cdot q^t$$

$$\ln a^n = n \cdot \ln a$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

לזכור

- גדילה: $q > 1$ • דעיכה: $0 < q < 1$
- זמן הכפלה: $q^T = 2$
- בבסיס e: $A_t = A_0 \cdot e^{kt}$, $k = \ln q$

טעות נפוצה

- ירידה ב־15%: $q = 0.85$, לא 0.15
- 10% בשנה × 3 שנים זה **לא** 30%
- 6% לחודש, שואלים על שנה: $t = 12$