שלבי הפתרון בשאלות פונקציות חזקה

מתמטיקה • כיתה י"ב • 5 יחידות לימוד (שאלון 572)

מה שואלים?

מסלול 1 • חקירת פונקציה

שורשים וחזקות עם מעריך שבור / שלילי

1 כותבים כחזקה

$\sqrt{x} = x^{1/2}$ • $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ • $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

2 תחום הגדרה

שורש **זוגי** ← הביטוי ≥ 0 • שורש **אי־זוגי** ← לכל x

מכנה / מעריך שלילי ← $\neq 0$

3 גוזרים

$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$ • שרשרת: $(g^r)' = r \cdot g^{r-1} \cdot g'$

מסדרים לשבר אחד עם שורש במכנה

4 קיצון • עלייה/ירידה

נקודות חשודות: $f' = 0$, **וגם** נקודות שבהן f לא מוגדרת, **וגם** קצות התחום • טבלת סימנים

5 אסימפטוטות • סקיצה

מכנה $= 0$ ← אנכית • $x \to \pm\infty$ ← אופקית

f לא מוגדרת ← משיק אנכי / „חוד"

מסלול 2 • אינטגרל • שטח • נפח

קודם כותבים כחזקה, ואז מבצעים

1 פונקציה קדומה

$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ • כאשר $r \neq -1$

$\int (ax+b)^r dx = \frac{(ax+b)^{r+1}}{a(r+1)} + C$

2 שטח

חיתוכים = גבולות. משוואה עם שורש ← מעלים בריבוע **ובודקים בהצבה**

$S = \int_a^b (f - g)dx$ – f הגרף העליון

3 נפח גוף סיבוב (סביב ציר x)

$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ • בריבוע השורש נעלם

✏️ דוגמה למסלול 1

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot (x-5)$ • תחום: כל x (שורש אי־זוגי)

1. $f(x) = x^{5/3} - 5x^{2/3}$
3. $f' = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{5(x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$
4. $x = 2$: $f' = 0$ • $x = 0$: f' לא מוגדרת
4. סימן f': $+$ עד 0, $-$ בין 0 ל־2, $+$ אחרי 2

תשובה: מקס' $(0,\ 0)$ (חוד) • מינ' $(2,\ -3 \cdot \sqrt[3]{4})$

✏️ דוגמה למסלול 2

התחום בין $y = \sqrt{x}$, ציר x והישר $x = 4$

2. $S = \int_0^4 x^{1/2}dx = [\frac{2}{3}x^{3/2}]_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$
3. $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$
3. $= \pi[\frac{x^2}{2}]_0^4 = 8\pi$

תשובה: $S = 5\frac{1}{3}$ • $V = 8\pi \approx 25.13$

📐 נוסחאות לזכור

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$V = \pi \int_a^b y^2 dx$

💡 לזכור

- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ – לא מוגדרת ב־0
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
- $\sqrt[3]{x}$ מוגדר גם לשליליים

⚠️ טעות נפוצה

- לשכוח נקודות שבהן f לא מוגדרת
- $\int x^{-1/2}$: מחלקים ב־$\frac{1}{2}$, כלומר כופלים ב־2
- שורש זוגי: לבדוק תחום לפני הכול