שלבי הפתרון בשאלות וקטורים

מתמטיקה • כיתה י"ב • 5 יחידות לימוד (שאלון 572)

איך נתונים הווקטורים?

מקרה 1 • וקטורים בגוף (בסיס)

בלי שיעורים: נתונים $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, אורכים וזוויות

1 מביעים את הווקטור בעזרת $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$

הולכים במסלול לאורך מקצועות.

נקודה על קטע: $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$

2 מכינים מכפלות של הבסיס

$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha$

$\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$ • וקטורים מאונכים: 0

3 מתרגמים את התנאי

מאונכים: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ • מקבילים: $\underline{a} = k \cdot \underline{b}$

4 אורך וזווית

$|\underline{a}|^2 = \underline{a} \cdot \underline{a}$ • $\cos\alpha = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$

מקרה 2 • שיעורים: ישרים ומישורים

נתונות נקודות $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ ומשוואות

1 ישר: $\underline{x} = A + t \cdot \underline{u}$

נקודה + וקטור כיוון • נקודה כללית: $(x_A + tu_1\ ,\ \dots)$

2 מישור: נורמל $\underline{n} = (a\ ,\ b\ ,\ c)$

$\underline{n}$ מאונך לשני כיוונים במישור.

$ax + by + cz + d = 0$, את d מוצאים מנקודה

3 חיתוך ישר ומישור

מציבים נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ומוצאים את t

4 זווית / מרחק

מהנוסחאון: בין מישורים cos • ישר ומישור sin • נקודה ממישור

מצב הדדי של שני ישרים

כיוונים מקבילים: $\underline{u} = k \cdot \underline{v}$

יש נקודה משותפת ← מתלכדים

אין ← מקבילים

כיוונים לא מקבילים:

משווים רכיבים: $A + t\underline{u} = B + s\underline{v}$

3 משוואות, 2 נעלמים

יש פתרון לשלוש ← נחתכים (מציבים t ← נקודת החיתוך)

אין פתרון ← מצטלבים

דוגמה למקרה 1

בתיבה: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$

מאונכים זה לזה, $|\underline{w}| = 4$, $|\underline{v}| = 2 = |\underline{u}|$

M אמצע CC' . מצאו את $|\overrightarrow{AM}|$

1. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$
2. $|\overrightarrow{AM}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 + \frac{1}{4}|\underline{w}|^2$ (שאר המכפלות 0)
3. $|\overrightarrow{AM}|^2 = 4 + 4 + 4 = 12$

תשובה: $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

דוגמה למקרה 2

מצאו את נקודת החיתוך ואת הזווית בין הישר

$\underline{x} = (1\ ,\ 0\ ,\ 2) + t(1\ ,\ 1\ ,\ -1)$ למישור $x + 2y + z - 9 = 0$

1. $(1 + t) + 2t + (2 - t) - 9 = 0$ ← $t = 3$ ← $(4\ ,\ 3\ ,\ -1)$
2. $\sin\beta = \frac{|1 + 2 - 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{18}}$
3. $\beta \approx 28.13°$

תשובה: $(4\ ,\ 3\ ,\ -1)$ • $\beta \approx 28.13°$

מהנוסחאון

$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

ישר–מישור: $\sin\beta = \frac{|\underline{n} \cdot \underline{u}|}{|\underline{n}| \cdot |\underline{u}|}$

לזכור (לא בנוסחאון)

- ישר מקביל למישור ⇔ $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$
- ישר מאונך למישור ⇔ $\underline{u} = k \cdot \underline{n}$
- מקביל למישור של $\underline{u}$, $\underline{v}$: המקדם של $\underline{w}$ הוא 0

טעות נפוצה

- ישר–מישור: sin , לא cos
- לכל ישר פרמטר משלו: t ו־s
- זווית חדה ← ערך מוחלט במונה